

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Fatma ÇİNAR

BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI VE RANKI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI VE RANKI

Fatma ÇİNAR

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2010 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Hayrullah AYIK
DANIŞMAN

.....
Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
ÜYE

.....
Prof. Dr. Bilal Vatansever
ÜYE

.....
Doç. Dr. Gonca AYIK
ÜYE

.....
Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI VE RANKI

Fatma ÇİNAR

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman :Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Yıl: 2011, Sayfa: 55
Jüri :Prof. Dr. Hayrullah AYIK
:Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
:Prof. Dr. Bilal Vatansever
:Doç. Dr. Gonca AYIK
:Yrd. Doç. Dr. Ersin KRAL

Doğal sıralı $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ kümesi üzerindeki tüm tam dönüşümlerin yarigrubunu T_n ile, ve tüm kısmi dönüşümlerin yarigrubunu PT_n ile gösterelim. Biz bu tez de PT_n nin elemanlarını çarpanlara ayıran bir algoritma verdik. Bu algoritmayı kullanarak tüm kısmi dönüşümler yarigrubu için bazı doğuray kümeleri elde ettik.

T_n in tüm sıra koruyan elemanlarının oluşturduğu yarigrubu O_n

$$O_n = \{a \in T_n \setminus S_n : x \leq y \Rightarrow xa \leq ya \quad (\forall x, y \in X_n)\}$$

ve PT_n 'nin tüm kısmi sıra koruyan elemanlarının oluşturduğu yarigrubunu PO_n ile

$$PO_n = O_n \cup \{a \in PT_n \setminus T_n : x \leq y \Rightarrow xa \leq ya \quad (\forall x, y \in \text{dom } a)\}$$

gösterelim. Ayrıca bu algoritmayı kullanarak O_n ve PO_n yarigrupları için bazı doğuray kümeleri elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Kısmi dönüşüm yarigrubu, sırankoruyan dönüşüm, kısmi sırankoruyan dönüşüm, m – patika ve rank.

ABSTRACT

PhD THESIS

SOME TRANSFORMATION SEMIGROUP'S GENERATORS AND RANKS

Fatma ÇİNAR

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor :Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Year: 2010, Pages: 55
Jury :Prof. Dr. Hayrullah AYIK
:Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
:Prof. Dr. Bilal Vatansever
:Assoc. Prof. Dr. Gonca AYIK
:Asst. Prof. Dr. Ersin KRAL

Let PT_n and T_n denote the semigroups of all partial transformations semigroup and of all transformations semigroup on the natural ordered set $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$, respectively. In this thesis we give an algorithm to obtain a factorization of the elements of PT_n . We use this factorization to obtain information about generating sets for the semigroup of all partial transformations semigroup.

Let O_n denote the semigroup of all order-preserving elements

$$O_n = \{a \in T_n \setminus S_n : x \leq y \Rightarrow xa \leq ya \quad (\forall x, y \in X_n)\}$$

of T_n , and let PO_n denote the semigroup of all partial order-preserving elements

$$PO_n = O_n \cup \{a \in PT_n \setminus T_n : x \leq y \Rightarrow xa \leq ya \quad (\forall x, y \in \text{dom } a)\}$$

of PT_n . We also use this factorization to obtain information about generating sets for O_n and PO_n .

Key Words: Partial transformation semigroup, order-preserving transformation, partial order-preserving transformation, m – path, and rank.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında desteğini esirgemeyen, yapıcı ve yönlendirici fikirleri ile bana rehberlik eden Sayın Danışman Hocam, Prof. Dr. Hayrullah AYIK a bitmek tükenmek bilmeyen sabrı için sonsuz teşekkür ederim.

Doktora Tez İzleme Komitesi üyesi Sayın Doç. Dr. Gonca AYIK a çalışmamın tüm aşamalarında yönlendirici ve olumlu katkılarından dolayı teşekkür ederim. Doktora tez jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ, Sayın Prof. Dr. Bilal VATANSEVER ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL a teşekkürlerimi sunarım.

Yorulmadan, yılmadan büyük çabalarla sarfettikleri emeğin her merhalesine vefa borcu hissettiğim güzel aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER	SAYFA
ÖZ.....	I
ABSTRACT	I
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER SAYFA	IV
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1 Dönüşüm Yarıgrupları	4
2.2 Dönüşüm Yarıgruplarının Çarpanlara Ayrılışı ve Doğurayları.....	8
3. KISMİ DÖNÜŞÜM YARIGRUBUNDA ÇARPANLARA AYRILIŞ.....	15
3.1 Çarpanlara Ayırma.....	16
3.2 Çarpanlara Ayrılış Teoremi.....	22
4. ÜRETEÇLER VE (m, r) -PATİKA-DEVİRLERİN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ	
.....	29
4.1 Üreteç Kümeleri.....	29
4.2 Cebirsel Özellikler	32
5. KISMİ SIRAKORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUBU	39
5.1 Sırakoruyan Dönüşüm Yarıgrubu	39
5.1 Kısmi Sırakoruyan Dönüşüm Yarıgrubu.....	43
5.2.1 Kısmi m-patika Doğuray Kümesi	45
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ	55

1. GİRİŞ

Yarıgrup Teorisi, son 60 yıldır matematiğin önemli çalışma alanlarından biri olmuştur. Özellikle de dönüşüm yarıgrupları yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bu yarıgrupların yapısı, bazı elemanların sayısı, doğurayları, takdimleri ve rankları hala yaygın bir şekilde çalışılmaktadır.

Dönüşüm yarıgruplarının doğurayları ile ilgili ilk çalışmalardan biri singüler dönüşüm yarı grubunun idempotentler tarafından doğrulduğunu gösteren J.M. Howie nin, 1966 yılında yayımlan çalışması olmuştur. Tüm tam dönüşümler yarı grubunun idempotentlerinin eleman sayıları ilk defa Tainiter in 1968 yılında yayınlanan çalışmasında bulunmuştur. Ayrıca, Howie 1971 yılında sırankoruyan dönüşüm yarı grubunun idempotent elemanlarının sayısının $2n$ -inci Fibonacci sayısına eşit olduğunu göstermiştir. Gomes ve Howie, 1992 yılında sırankoruyan ve kısmi sırankoruyan dönüşüm yarı gruplarının idempotentler tarafından doğrulduğunu ifade etmiş ve doğuray kümelerinin minimal eleman sayısını hesaplamıştır. G. Ayık, H. Ayık ve J. M. Howie (2005) singüler dönüşüm yarı grubunun doğuray kümesinin idempotentler dışında m -patika ve (m,r) -patika olabileceğini de göstermiştir.

G. Ayık, H. Ayık ve J. M. Howie 2005 yılında tam dönüşüm yarı grubunun elemanlarını bir çarpanlarına ayırma algoritmasını geliştirerek, tam dönüşüm yarı grubunun elemanları ve alt yarı grupları ile ilgili bazı yeni sonuçlar elde etmiştir.

Çalışmaya kolaylık sağlaması açısından, $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ üzerindeki tüm tam dönüşümler yarı grubunu T_n ile, tüm kısmi dönüşümler yarı grubunu ise PT_n ile göstereceğiz. Ayrıca T_n yarı grubunun tüm sırankoruyan dönüşümlerinin oluşturduğu yarı grubu O_n , tüm kısmi sırankoruyan dönüşümlerin oluşturduğu yarı grubu PO_n ile göstereceğiz.

Önce tüm tam dönüşüm yarı grubu T_n için G. Ayık, H. Ayık ve J. M. Howie tarafından 2005 yılında yayınlanan çalışmalarındaki çarpanlarına ayırma algoritmasını vereceğiz. Bu çalışmadan yola çıkarak, tüm tam dönüşüm yarı grubundaki çarpanlarına ayırma algoritmasını tüm kısmi dönüşüm yarı gruplarına genelleyeceğiz. Elde edilenler doğrultusunda çarpanların ayırık ya da bir ortak

elemanlı olduğunu çarpanlarına ayrılış teoremi ile vereceğiz. Burada güzel olan çarpanların bir ortak elemanlarının olması durumunda ikinci çarpanın yapısının belirgin olması yani m-patika olmasıdır.

Dördüncü bölümde, tüm kısmi singüler dönüşüm yarıgrubu $SPT_n = PT_n \setminus S_n$ nin m-patikalar tarafından doğrulacağını göstereceğiz. Bu bölümde ayrıca çarpanlara ayrılışın cebirsel özelliklerini vereceğiz. Bununla birlikte her farklı yapıdaki (m,r)-patika-devirlerinin doğurduğu monojenik altyarıgrup yapılarını vereceğiz.

Beşinci bölümde, kısmi sırankoruyan dönüşüm yarıgrubu PO_n deki defekti (noksanlığı) 1 olan elemanların kısmi m-patika yapısında olacağını vereceğiz. PO_n yarıgrubundaki kısmi m-patikalar çarpımının idempotentleri verdiğini göstereceğiz. Amacımız, kısmi m-patikalar kümesinin PO_n nin doğuray kümesi olduğunu göstermektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde ileride kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1 S boş olmayan bir küme olsun. O zaman

$$\circ : S \times S \rightarrow S$$

şeklinde tanımlı dönüşümüne S üzerinde bir ikili işlem ve $(S, \circ)$ ikilisine de bir *grupoid* denir. Her $a, b \in S$ için (a, b) nin ikili işlem altındaki görüntüsünü $a \circ b$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.2 $(S, \circ)$ bir grupoid olsun. Her $a, b, c \in S$ için

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

ise $(S, \circ)$ ikilisine bir *yarıgrup* denir.

$(S, \circ)$ bir yarıgrup olsun. Biz işlemlerde kolaylık sağlamak adına $(S, \circ)$ ikilisi yerine S ve her $a, b \in S$ için $a \circ b$ yerine ab ifadelerini kullanacağız.

Tanım 2.3 S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Her $a \in S$ için $ea = a$ ise e ye S nin bir *sol birim elemanı*, her $a \in S$ için $ae = a$ ise e ye S nin bir *sağ birim elemanı* denir. Hem sağ hem de sol birim olan bir elemana *birim eleman* denir.

Bir yarıgrupda birden fazla sağ veya sol birim eleman olabilir. Fakat bir yarıgrupda birim eleman varsa kolayca gösterilebilir ki birim eleman tektir. Mevcut ise birim elemanı 1 ile göstereceğiz.

Tanım 2.4 Birim elemanlı bir yarıgruba bir *monoid* denir.

Tanım 2.5 S bir yarıgrup ve $z \in S$ olsun. Her $a \in S$ için $za = z$ ise z ye S nin bir *sol sıfır elemanı*, her $a \in S$ için $az = z$ ise z ye S nin bir *sağ sıfır elemanı* denir. Hem sol hem de sağ sıfır olan elemana *sıfır eleman* denir.

Bir yarıgrupda birden fazla sağ veya sol sıfır eleman olabilir. Fakat bir yarıgrupda sıfır eleman varsa kolayca gösterilebilir ki sıfır eleman tektir ve biz bunu 0 ile göstereceğiz.

Tanım 2.6 S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e^2 = e \cdot e = e$ ise e ye S 'nin bir *idempotent elemanı* denir. Ayrıca her elemanı idempotent olan yarıgruba bir *band* denir.

Sol sıfır, sağ sıfır, sıfır, sol birim, sağ birim ve birim elemanların idempotent olduğu kolayca gösterilebilir.

S herhangi bir yarıgrup olsun.

$$S^1 = \begin{cases} S & 1 \in S \\ S \cup \{1\} & 1 \notin S \end{cases}$$

olarak tanımlansın. S^1 üzerinde ikili işlemi her $s, t \in S^1$ için

$$st = \begin{cases} st & s, t \in S \\ s & t = 1 \\ t & s = 1 \\ 1 & s = t = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa S^1 bir monoid olup, S^1 e gerekir ise *birim eleman eklenerek S den elde edilmiş monoid* denir.

Tanım 2.7 S bir yarıgrup ve $T \subseteq S$ olsun. Her $a, b \in T$ için $ab \in T$ ise T ye S nin bir *altarıgrubu* denir ve $T \leq S$ ile gösterilir.

2.1 Dönüşüm Yarıgrupları

Tanım 2.8 X boş olmayan bir küme olsun. $X \times X$ kartezyen çarpımının her alt kümesine X üzerinde bir *bağıntı* denir. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesini B_X ile göstereceğiz.

Önerme 2.9 Her $a, b \in \mathbf{B}_x$ için

$$a \circ b = \{(x, y) \in X \times X : z \in X \text{ için } (x, z) \in a \text{ ve } (z, y) \in b\}$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile $\mathbf{B}_x$ bir yarıgrupdur. Ayrıca birim elemanı,

$$1_x = \{(x, x) : x \in X\}$$

olan bir monoid olur. Herbir $a \in \mathbf{B}_x$ elemanının görüntü kümesi, tanım kümesi ve tersi sırasıyla

$$\text{im}(a) = \{y \in X : (x, y) \in a\}$$

$$\text{dom}(a) = \{x \in X : (x, y) \in a\}$$

$$a^{-1} = \{(y, x) \in X \times X : (x, y) \in a\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.10 $a \in \mathbf{B}_x$ olsun. Her $x \in \text{dom}(a)$ için $|xa| = 1$ ise a bağıntısına bir *kısmi dönüşüm* denir. X üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin kümesini PT_x ile göstereceğiz. Böylece $a \in PT_x$ ise her $x, y_1, y_2 \in X$ için $(x, y_1) \in a$ ve $(x, y_2) \in a$ olduğunda $y_1 = y_2$ olur.

Önerme 2.11 Tüm kısmi dönüşümlerin kümesi PT_x , tüm bağıntılar yarıgrubu $\mathbf{B}_x$ in bir altarıgrubudur.

İspat: $a, b \in PT_x$ ve $(x, y_1), (x, y_2) \in ab$ olsun. O zaman

$$(x, z_1) \in a, (z_1, y_1) \in b \text{ ve } (x, z_2) \in a, (z_2, y_2) \in b$$

olacak şekilde $z_1, z_2 \in X$ mevcuttur. Böylece $a \in PT_x$ olduğundan $z_1 = z_2$, ve dolayısıyla $b \in PT_x$ olduğundan $y_1 = y_2$ olup $ab \in PT_x$ olur.

Tanım 2.12 $a \in PT_X$ için $dom(a) = X$ ise a ya bir *tam dönüşüm* denir. X üzerindeki tüm tam dönüşümlerin kümesini T_X ile göstereceğiz.

Önerme 2.13 Tam dönüşümlerin kümesi T_X , tüm kısmi dönüşümler yarıgrubu PT_X in bir altarıgrubudur. ■

Tanım 2.14 T_X yarıgrubuna X üzerindeki *tam dönüşümler yarıgrubu* denir. T_X in herhangi bir altarıgrubuna da (tam) *dönüşümler yarıgrubu* denir.

Tanım 2.15 $a \in T_X$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $|xa^{-1}| = 1$ ise a ya bir *permütasyon* denir. X üzerindeki tüm permütasyonların kümesini S_X ile göstereceğiz.

Tanım 2.18 Tüm permütasyonların kümesi S_X , tam dönüşümler yarıgrubu T_X in bir alt yarıgrubu olup S_X e X üzerinde *simetrik grup* (permütasyon grubu) denir.

$|X| = n$ ise $X = X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ olarak kabul edip, B_X, PT_X, T_X, S_X yerine sırasıyla B_n, PT_n, T_n, S_n ifadelerini kullanacağız. Bu durumda

$$S_n \leq T_n \leq PT_n \leq B_n$$

olur.

Her bir $a \in PT_n$ için

$$fix(a) = \{x \in X_n : xa = x\}$$

$$shift(a) = X_n - fix(a) = \{x \in X_n : xa \neq x\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.19 S bir yarıgrup ve $X \subseteq S$ olsun. S nin X i içeren tüm altarıgruplarının kesişimine, X in *doğurduğu altarıgrup* denir. Bu altarıgrup $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer $S = \langle X \rangle$ ise X 'e S nin bir *doğuray* (doğuray kümesi) denir. Burada X sonlu ise S ye *sonlu doğuraylı yarıgrup* denir. Eğer S sonlu doğuraylı yarıgrup ise

$$\text{rank}(S) = \min \{|X| : X \subseteq S, S = \langle X \rangle\}$$

değerine S nin *rankı* denir.

S bir yarıgrup ve $X \subseteq S$ için $\langle X \rangle = \mathbf{I}\{U : U \leq S \text{ ve } X \subseteq U\}$ olduğu tanımdan görülür. Buradan

- (i) $X \subseteq \langle X \rangle$ ve
- (ii) $U \leq S$ ve $X \subseteq U$ ise $\langle X \rangle \subseteq U$

olur.

Tanım 2.20 S bir yarıgrup ve $E = E(S)$ de S deki tüm idempotentlerin kümesi olsun. Eğer bir $X \subset E$ için $S = \langle X \rangle$ ise X e bir *idempotent doğuray* denir.

Teorem 2.21 S bir yarıgrup ve $T \leq S$ olsun. $S - T$, S nin bir ideali ise S nin her X doğurayı için öyle bir $Y \subseteq X$ vardır ki Y de T nin doğurayıdır.

İspat: S nin her X doğurayı için $Y = X \cap T$ alındığında $S - T$, S nin bir ideali olduğundan kolayca gösterilir ki Y de T nin doğurayı olur. ■

Permütasyon olmayan tam dönüşümlere singüler dönüşüm diyeceğiz. $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ olmak üzere tüm singüler dönüşümlerin kümesini ST_n ile göstereceğiz. Böylece $ST_n = T_n - S_n$ olur.

Burada $a, b, q, g \in PT_n$ dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$a = [12|1] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{L} & n \\ 2 & 1 & 3 & \mathbf{L} & n \end{pmatrix}$$

$$b = [12, \mathbf{K}, n|1] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{L} & n-1 & n \\ 2 & 3 & \mathbf{L} & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$q = [12|2] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{L} & n \\ 2 & 2 & 3 & \mathbf{L} & n \end{pmatrix}$$

$$g = [1-|-] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{L} & n \\ - & 2 & 3 & \mathbf{L} & n \end{pmatrix}$$

Teorem 2.22 Yukarda ki notasyonlar ile $S_n = \langle \{a, b\} \rangle$ olur. Ayrıca $n \geq 3$

için $\text{rank}(S_n) = 2$ olur.

İspat: İspatı için Rotman (1994) e bakınız. ■

Teorem 2.23 Yukarda ki notasyonlar ile $T_n = \langle \{a, b, q\} \rangle$ olur. Ayrıca $n \geq 3$ için

$\text{rank}(T_n) = 3$ olur.

İspat: İspatı için Howie (1995) e bakınız. ■

Teorem 2.24 Yukarda ki notasyonlar ile $PT_n = \langle \{a, b, q, g\} \rangle$ olur. Ayrıca $n \geq 3$ için

$\text{rank}(PT_n) = 4$ olur.

İspat: İspatı için Howie (1995) e bakınız. ■

2.2 Dönüşüm Yarıgruplarının Çarpanlara Ayrılışı ve Doğurayları

Bu kısımda $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ve T_n de X_n üzerindeki tüm tam dönüşümler yarıgrupunu gösterecektir.

Bir $a \in T_n$ için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq X_n$ olmak üzere

$$x_1 a = x_2, x_2 a = x_3, \dots, x_{m-1} a = x_m, x_m a = x_r \quad (x_r \in X)$$

ve her $x \in X_n - X$

$$xa = x$$

ise a ya bir (m, r) -patika-devir denir; ve

$$a = [x_1, x_2, \dots, x_m | x_r]$$

şeklinde gösterilir. Burada m ye a nın indeksi (uzunluğu) ve r ye a nın *periyodu* denir. Özel olarak,

- (i) eğer $r = m$ ise a ya bir m – *patika*;
- (ii) eğer $m \geq 2$ ve $r=1$ ise a ya bir m – *devir*;
- (iii) eğer $m=r=1$ ise a ya *birim patika*

denir.

Eğer a bir birim patika ise birim dönüşüm olup, birim dönüşümü daima $a = [1|1]$ olarak yazacağız. Ayrıca $a = [x_1, \dots, x_{m-1}, x|x]$ şeklindeki bir m – patikaya bir x e patikadır diyeceğiz.

Eğer $a = [x_1, x_2, \dots, x_m|x_r]$ ise $r_1(a) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ olarak tanımlanır.

Herhangi iki $a, b \in T_n$ patika-devirleri için

$$r_1(a) \cap r_1(b) = \emptyset$$

ise a ve b ya *ayrık patika-devirler* denir. Eğer $r_1(a) \cap r_1(b)$ kümesi sadece bir elemandan oluşuyor ise a ve b ya *1-bağlı patika-devirler* denir.

Şimdi T_n nin elemanları için G. Ayık, H. Ayık ve J. M. Howie nin 2005 yılında yayınlanan makalelerinde ifade ettikleri algoritmayı verelim:

2.2.1 Algoritma

$a \in T_n$ olsun. Eğer a birim dönüşüm ise $a = [1|1]$ olur. a birim dönüşüm değil ise $x \in X_n$ için

$$x, xa, xa^2, xa^3, \dots, xa^m, \dots$$

şeklindeki dizileri göz önüne alalım. Bu dizilerdeki tüm elemanlar birbirinden farklı olamayacağından bazı elemanlar belli bir adımdan sonra tekrar etmek zorundadır. Dolayısıyla, her bir $x \in \text{shift}(a)$ için

$$x, xa, \dots, xa^{k_x}$$

elemanları birbirinden farklı, fakat

$$xa^{k_x+1} \in \{x, xa, \dots, xa^{k_x}\}$$

olacak şekilde bir $k_x \in \mathbf{Z}^+$ vardır. Böylece, her bir $x \in \text{shift}(a)$ için

$$a_x = [x, xa, \dots, xa^{k_x} | xa^{k_x+1}]$$

şeklinde bir patika-devir tanımlanır, ve bunlara a nın bir *çarpanı* denir. Ayrıca a nın indeksi (uzunluğu) en büyük olan çarpanına *birinci çarpan* denir, ve a_1 ile gösterilir. (Eğer aynı uzunluğa sahip birden fazla birinci çarpan var ise x i en küçük olan a_x i a_1 olarak seçeceğiz.) Eğer

$$a^{(1)} : X_n \rightarrow X_n$$

dönüşümü, her $x \in X_n$ için

$$x a^{(1)} = \begin{cases} x, & x \in r_1(a_1) \\ xa, & x \notin r_1(a_1) \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise

$$a = a_1 a^{(1)}$$

olup, $a^{(1)}$ dönüşümüne a nın *birinci böleni* denir. a nın *ikinci çarpan* a_2 ve *ikinci böleni* $a^{(2)}$ de $a^{(1)}$ in birinci çarpanı ve birinci böleni olarak tanımlanır. Benzer şekilde çarpanlar ve bölenler tanımlanmaya

$$a_p \neq [1|1] \text{ ve } a^{(p)} = [1|1]$$

elde edilinceye kadar devam edilir. Böylece

$$a = a_1 a_2 \mathbf{L} a_p$$

olur. Bu durumda p ye a nın *patika-devir rankı* denir; ve $pcr(a)$ ile gösterilir. Ayrıca, eğer a birim dönüşüm ise $pcr(a) = 0$ olarak tanımlanır.

Eğer $a \in S_n$ ise a nın devirlerin çarpımı olarak yazılışı ile patika-devirlerin çarpımı olarak yazılış çakışır. Ancak, grup teorideki notasyon ile $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ devri bu tezde kullanılan notasyon ile $[x_1, x_2, \dots, x_m | x_1]$ şeklinde yazılır; ve

$$[x_1, x_2, \dots, x_m | x_1] = [x_2, x_3, \dots, x_m, x_1 | x_2] = \mathbf{L} = [x_m, x_1, x_2, \dots, x_{m-1} | x_m]$$

olur.

Bir $a \in T_n$ yukarda ifade edilen algoritma ile patika-devirlerin bir çarpımı olarak yazıldığında devirlerin sayısını $cycl(a)$, devir olmayan patika-devirlerin sayısını $pr(a)$ ile gösterilsin.

Örnek 2.25 $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 9 & 6 & 7 & 4 & 10 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in T_{10}$ ise

$$a = [1, 4, 6|4][2, 7, 10|7][3, 9|3][5, 7|7][8, 4|4]$$

olup, $pcr(a) = 5$, $cycl(a) = 1$ ve $pr(a) = 4$ olur.

Görüntüde olmayan elemanların sayısı, yani a nın noksanlığı (defekt) $def(a)$ ile gösterilir ise

$$def(a) = |X - im(a)|$$

olur. Kolayca görülür ki eğer $a \in T_n$ bir devir olmayan patika-devir ise noksanlığı 1, yani $def(a) = 1$ olur.

Şimdi G. Ayık, H. Ayık ve J. M. Howie nin 2005 yılında yayınlanan makalelerinde ifade ve ispat ettikleri teoremi verelim:

Teorem 2.26 $a \in T_n$ olsun.

- (i) $pcr(a) = def(a) + cycl(a) = pr(a) + cycl(a)$.
- (ii) $a_1, a_2, \dots, a_p$, a nın çarpanları olsun. O zaman, her $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ ve $i < j$ için a_i ve a_j patika-devirleri ya ayrıktır ya da 1-bağılıdır (diğer bir ifade ile $|r_1(a_i) \cap r_1(a_j)| = 0$ veya 1 olur). Eğer bir $x \in X_n$ için $r_1(a_i) \cap r_1(a_j) = \{x\}$ ise
 - a. a_i ve a_j patika-devirlerinin her ikisi de devir değildir;
 - b. $a_i = [x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, x_m | x_r]$ ise $x_1 \neq x$ olur; ve
 - c. $a_j = [y_1, \mathbf{K}, y_{q-1}, x | x]$ şeklinde tanımlıdır.

İspat: İspatı için Ayık, Ayık ve Howie (2005) ye bakınız. ■

Sonuç 2.27 Bir çarpana ayrılıştta a_i ve a_j çarpanlarının değışmeli olması için gerek ve yeter koşul a_i ve a_j lerin ya ayrık ya da aynı x e patika olmasıdır.

İspat: İspatı için Ayık, Ayık ve Howie (2005) ye bakınız. ■

Teorem 2.28 $a \in ST_n$ olsun. O zaman $a = b_1 \mathbf{L} b_k$ olacak şekilde devir olmayan $b_1, \mathbf{K}, b_k$ patika-devirleri vardır.

İspat: İspatı için Ayık, Ayık ve Howie(2005) ye bakınız. ■

Singüler dönüşümler yarıgrubu ST_n idempotent elemanları tarafından üretildiği iyi bilinmektedir (bkz Howie (1966)). Bu gerçek yukarda ki notasyon ile tekrar ifade ve ispat edildi.

Teorem 2.29 ST_n nin tüm 2 -patikalarının kümesi ST_n ni üretir.

İspat: Bu teoremin ispatı bizim için önemli olduğundan ispatı yapalım (ayrıca, bkz Ayık, Ayık ve Howie (2005)). Her $2 \leq r < m \leq n$ için

$$[x_1, x_2, \dots, x_m | x_r] = [x_m, x_{r-1} | x_{r-1}] [x_1, x_2, \dots, x_m | x_m]$$

ve

$$[x_1, \dots, x_{m-1}, x_m | x_m] = [x_{m-1}, x_m | x_m] [x_1, x_2, \dots, x_{m-1} | x_{m-1}]$$

oldüğundan

$$[x_1, x_2, \dots, x_m | x_r] = [x_m, x_{r-1} | x_{r-1}] [x_{m-1}, x_m | x_m] [x_{m-2}, x_{m-1} | x_{m-1}] \mathbf{L} [x_1, x_2 | x_2]$$

olur.

Böylece bir önceki teoremden istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 2.30 $2 \leq m \leq n$ için ST_n nin tüm m -patikalarının kümesi ST_n ni üretir.

İspat: Bu teoremin ispatı da bizim için önemli olduğundan ispatı yapalım (ayrıca, bkz Ayık, Ayık ve Howie (2005)). Teorem 2.29 da $m = 2$ için yapıldı. Biz $m > 2$

kabul edelim. Her hangi bir $[x_1, x_2 | x_2]$ 2-patika verilsin. Herhangi farklı $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \in X_n$ elemanları için

$$a = [x_m, x_{m-1}, \mathbf{K}, x_4, x_3, x_1, x_2 | x_2]$$

ve

$$b = [x_1, x_3, x_4, \dots, x_{m-1}, x_m, x_2 | x_2]$$

alındığında $ab = [x_1, x_2 | x_2]$ olur. Böylece m -patikalar, 2-patikaları ve dolayısıyla ST_n ni üretir. ■

Teorem 2.31 Eğer $n \geq m \geq 2$ ve m çift ise tüm 2-patika ve 2-devirlerin kümesi T_n i doğurur. Ayrıca $n \geq m \geq 3$ ve m tek ise tüm 2-patika ve 2-devirlerin kümesi T_n deki $SA_n = ST_n \cup A_n$ kümesini doğurur (Buradaki A_n kümesi alterne grubudur).

İspat: İspatı için Ayık, Ayık ve Howie(2005) ye bakınız. ■

Teorem 2.32 $2 \leq m, r \leq n$ için ST_n , (m, r) -patika-devirleri tarafından doğrulur.

İspat: İspatı için Ayık, Ayık, Howie ve Ünlü (2005b) ye bakınız. ■

T_n tüm dönüşümler yarıgrubunun herhangi bir alt yarıgrubu S ve X de S nin herhangi bir doğuray kümesi ve $1 \leq m, r \leq n$ olsun. Eğer X nin tüm elemanları (m, r) -patika-devirler ise X e S nin bir (m, r) -doğurayı denir. Ayrıca

$$\text{rank}_{m,r}(S) = \min\{|X| : X, S \text{ nin bir } (m, r)\text{-doğurayı}\}$$

sayısına S nin bir (m, r) -rankı denir.

Teorem 2.33 $n \geq 3$ ve $n \geq m \geq r \geq 2$ için $\text{rank}_{m,r}(ST_n) = n(n-1)/2$ dir.

İspat: İspatı için Ayık, Ayık, Ünlü ve Howie (2005b) ye bakınız. ■

3. KISMİ DÖNÜŞÜM YARIGRUBUNDA ÇARPANLARA AYRILIŞ

Bu bölümde kısmi dönüşümler yarıgrubunun elemanlarının çarpanlara ayrılış yöntemi verilecektir.

$X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu bir küme olsun. X_n üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin kümesini PT_n şeklinde göstermiştik. Önceki bölümde T_n nin elemanları için yapılan bazı tanımları kısmi dönüşümler yarıgrubunun elemanlarına genelleyelim.

Herhangi bir $a \in SPT_n = PT_n - T_n$ elemanını, bir $m-1$ elemanlı $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\} \subseteq X_n$ için

$$x_1 a = x_2, x_2 a = x_3, \dots, x_{m-2} a = x_{m-1}$$

$$xa = x \quad (\forall x \in X_n - X)$$

ve $x_{m-1} a \notin \text{doma}$ ise a ya bir *kısmi m-patika* denir; ve

$$a = [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, -|-]$$

şeklinde gösterilir. Burada m ye a nın *indeksi (uzunluğu)* denir. Ayrıca, a nın periyodu sıfır olarak tanımlanır. Ayrıca, bir kısmi m -patikaya bir $(m, 0)$ -patika-devir de diyebiliriz. Biz hem (m, r) -patika-devirlerine hem de kısmi m -patikalarına kısaca *kısmi patika-devir* diyeceğiz.

Eğer $a = [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, -|-]$ bir kısmi m -patika ise

$$r_1(a) = \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$$

olarak tanımlanır. Herhangi $a, b \in PT_n$ kısmi patika-devirleri için

$$r_1(a) \cap r_1(b) = \emptyset$$

ise a ve b ya *ayrık kısmi patika-devirler* denir. Eğer $r_1(a) \cap r_1(b)$ kümesi sadece bir elemandan oluşuyor ise a ve b ya *1-bağlı kısmi patika-devirler* denir.

3.1 Çarpanlara Ayırma

Bu bölümde PT_n deki tüm elemanların kısmi patika-devirlerin bir çarpımı olarak yazılabileceğini göstereceğiz. Önce T_n nin elemanları için Ayık, Ayık ve Howie (2005) makalelerinde ifade ettikleri algoritmayı tüm kısmi dönüşümler yarıgrubuna uygulanabilecek şekilde genelleleyelim.

Birim olmayan herhangi bir $a \in PT_n$ dönüşümünü ele alalım. Eğer $x \in \text{dom}(a) - \text{fix}(a)$ ve her $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için $xa^{k_x} \in \text{dom}(a)$ ise $xa^{k_x+1} \in \{x, xa, \mathbf{K} xa^{k_x}\}$ olacak şekilde en küçük $k_x \in \mathbb{Z}^+$ için

$$a_x = [x, xa, \dots, xa^{k_x} \mid xa^{k_x+1}]$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $x, xa, \mathbf{K}, xa^{k_x-1} \in \text{dom}(a)$ fakat $xa^{k_x} \notin \text{dom}(a)$ olacak şekilde bir $k_x \in \mathbb{Z}^+$ mevcut ise

$$a_x = [x, xa, \dots, xa^{k_x}, - \mid -]$$

şeklinde tanımlanır. Son olarak, eğer $x \in X_n - \text{dom}(a)$ ve $x \notin \text{im}(a)$ ise

$$a_x = [x, -|-]$$

şeklinde tanımlanır. Bu üç durumda a_x kısmi patika devrine a nın bir (*kısmi*) *çarpanı* denir. Benzer şekilde a nın indeksi en büyük olan çarpanına *birinci çarpan* denir ve a_1 ile gösterilir. (Eğer aynı uzunluğa sahip birden fazla birinci çarpan var ise x i en küçük olan a_x çarpanını a_1 olarak seçeceğiz.)

$$a^{(1)} : (\text{dom}(a) \cup r_1(a)) \rightarrow X_n$$

dönüşümü, her $x \in \text{dom}(a)$ için

$$xa^{(1)} = \begin{cases} x, & x \in r_1(a_1) \\ xa, & x \notin r_1(a_1) \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Dikkat edilecek olursa

$$a = a_1 a^{(1)}$$

olup, $a^{(1)}$ çarpanına a nın *birinci böleni* denir. Benzer işlemler $a^{(1)}$ çarpanına uygulanarak a nın *ikinci çarpanı* a_2 ve *ikinci böleni* $a^{(2)}$ bulunur. Bu işlemlere

$$a_p \neq [1|1] \text{ ve } a^{(p)} = [1|1]$$

elde edilinceye kadar devam edilirse $a \in PT_n$ elemanı

$$a = a_1 a_2 \mathbf{L} a_p$$

şeklinde çarpanlarına ayrılmış olur. Buradaki $p \in \mathbb{C}^+$ sayısına a nın *kısmi patika-devir rankı* denir ve yine $pcr(a)$ ile gösterilir. Daha önce tanımlandığı gibi $pr(a) = pcr(a) - cycl(a)$ olur.

Kolayca görüleceği üzere eğer a sıfır (boş) dönüşüm ise bu algoritma ile

$$a = [1, -|-][2, -|-] \mathbf{L} [n, -|-]$$

şeklinde çarpanlara ayrılır. Böylece, eğer a sıfır dönüşüm ise $pcr(a) = n$ olur.

Biz kısaca sıfır dönüşümünü $a = [-|-]$ olarak da yazacağız.

Aşağıda $n=1, 2, 3$ değerleri için PT_n nin elemanlarının kısmi patika devirlere parçalanışı verilmiştir.

- **n=1 için**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [1|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix} = [1, -|-] = [-|-]$$

- **n=2 için**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = [2, 1|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = [1|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = [1, 2|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = [1, 2|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & - \end{pmatrix} = [2, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & - \end{pmatrix} = [1, 2, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ - & 1 \end{pmatrix} = [2, 1, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ - & 2 \end{pmatrix} = [1, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ - & - \end{pmatrix} = [1, -|-][2, -|-] = [-|-]$$

• **n=3 için**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [2, 1|1][3, 1|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = [3, 2, 1|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = [2, 1|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = [3, 1|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = [3, 2|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = [1|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = [2, 3, 1|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = [2, 3|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = [2, 3|3]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [3, 1, 2|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = [3, 2, 1|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = [1, 2|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = [3, 1, 2|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = [1, 2|2][3, 2|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = [1, 2|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = [1, 2, 3|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = [1, 2, 3|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = [1, 2, 3|3]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [2, 1, 3|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = [1, 3, 2|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = [2, 1, 3|3]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = [1, 3|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = [1, 3, 2|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = [1, 3|3]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = [2, 3, 1|3]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = [1, 3, 2|3]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = [1, 3|3][2, 3|3]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & - \end{pmatrix} = [2, 1|1][3, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & - \end{pmatrix} = [3, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & - \end{pmatrix} = [2, 3, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & - \end{pmatrix} = [1, 2|1][3, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & - \end{pmatrix} = [1, 2|2][3, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & - \end{pmatrix} = [1, 2, 3, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & - \end{pmatrix} = [2, 1, 3, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & - \end{pmatrix} = [1, 3, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & - \end{pmatrix} = [1, 3, -|-][2, 3|3]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 1 \end{pmatrix} = [2, -|-][3, 1|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 2 \end{pmatrix} = [3, 2, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 3 \end{pmatrix} = [2, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & 1 \end{pmatrix} = [3, 1, 2, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & 2 \end{pmatrix} = [1, 2, -|-][3, 2|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & 3 \end{pmatrix} = [1, 2, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & - & 1 \end{pmatrix} = [1, 3|1][2, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & - & 2 \end{pmatrix} = [1, 3, 2, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & - & 3 \end{pmatrix} = [1, 3|3][2, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & 1 \end{pmatrix} = [2, 1, -|-][3, 1|1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & 2 \end{pmatrix} = [3, 2, 1, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & 3 \end{pmatrix} = [2, 1, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & 1 \end{pmatrix} = [3, 1, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & 2 \end{pmatrix} = [1, -|-][3, 2|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & 3 \end{pmatrix} = [1, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & 1 \end{pmatrix} = [2, 3, 1, -|-]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & 2 \end{pmatrix} = [1, -|-][2, 3|2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & 3 \end{pmatrix} = [1, -|-][2, 3|3]$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & - \end{pmatrix} &= [2, -|-][3, -|-] & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & - \end{pmatrix} &= [1, 2, -|-][3, -|-] \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & - & - \end{pmatrix} &= [1, 3, -|-][2, -|-] & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & - \end{pmatrix} &= [2, 1, -|-][3, -|-] \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & - \end{pmatrix} &= [1, -|-][3, -|-] & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & - \end{pmatrix} &= [2, 3, -|-][1, -|-] \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & 1 \end{pmatrix} &= [3, 1, -|-][2, -|-] & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & 2 \end{pmatrix} &= [3, 2, -|-][1, -|-] \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & 3 \end{pmatrix} &= [1, -|-][2, -|-] & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & - \end{pmatrix} &= [-|-]
 \end{aligned}$$

Bir $a \in PT_n$ elemanı yukarda ki genelleştirilmiş algoritma ile (kısmi) patika devirlerin bir çarpımı olarak yazıldığında kısmi m – patikaların sayısı $kp(a)$ ile gösterilir.

Kolayca görülür ki eğer $a \in PT_n$ bir devir olmayan (kısmi) patika-devir ise noksanlığı 1, yani $def(a) = 1$ olur.

Örnek 3.1. $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & - & 5 & 7 & 4 & 4 & - & 3 & 11 & 12 & 10 \end{pmatrix} \in PT_{12}$ ise

$$a = [2, 4, 5, 7|4][1, 3, -|-][10, 11, 12|10][6, 4|4][8, -|-][9, 3|3]$$

olup, $pcr(a) = 6$, $cycl(a) = 1$, $pr(a) = 5$ ve $kp(a) = 2$ olur.

Algoritmada aynı uzunluğa sahip elemanlardan en küçük elemanla başlayan seçilmesi durumu göz ardı edilir ise parçalanış tek türlü değildir. Örneğin; yukarda ki örnekte verilen kısmi dönüşüm aynı zamanda

$$a = [6, 4, 5, 7|4][9, 3, -|-][10, 11, 12|10][1, 3|3][2, 4|4][8, -|-]$$

şeklinde de çarpanlarına ayrılır.

3.2. Çarpanlara Ayrılış Teoremi

Şimdi G. Ayık, H. Ayık ve J. M. Howie (2005), makalelerinde T_n nin elemanları için buldukları bazı teorem ve sonuçları PT_n nin elemanlarına genelleyelim.

Teorem 3.2 $a \in PT_n$ olsun.

- (i) $pcr(a) = def(a) + cycl(a) = pr(a) + cycl(a)$.
- (ii) $a = a_1 a_2 \mathbf{L} a_p$ olsun. O zaman, her $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ ve $i < j$ için a_i ve a_j patika devirleri ya ayrıktır ya da 1-bağılıdır. Eğer bir $x \in X_n$ için $r_1(a_i) \cap r_1(a_j) = \{x\}$ ise
 - a. a_i ve a_j çarpanlarının her ikisi de devir değildir,
 - b. $a_i = [x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, x_m | x_r]$ veya $a_i = [x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, -|-]$ ise $x_1 \neq x$ dir,
 - c. $a_j = [y_1, \mathbf{K}, y_{q-1}, x | x]$ şeklindedir.
- (iii) $kp(a) = n - |dom(a)|$.

İspat: (i) $a = a_1 a_2 \mathbf{L} a_p$ olsun. $i = 1, 2, \dots, p$ için a_i çarpanı ya bir devir ya bir öz patika-devir veya bir kısmi m -patikadır.

Eğer $a_i = [x_1, x_2, \dots, x_m | x_r]$ çarpanı bir devir ise $x_r = x_1$ olup $x_1 \in im(a)$ olur.

Eğer $a_i = [x_1, x_2, \dots, x_m | x_r]$ çarpanı bir öz patika-devir ise $x_r \neq x_1$ olur. Bu durumda $x_1 \notin im(a)$ dir. Aksi halde $x_1 \in im(a)$ olsaydı $xa = x_1$ olacak şekilde bir $x \in X_n$

mevcut olup a_i den uzun $[x, x_1, x_2, \dots, x_m | x_r]$ patika-devri elde edilir ki bu çarpanlara ayrılış algoritması ile çelişir. O halde $x_i \notin im(a)$ dir.

Eğer $a_i = [x_1, \dots, x_{m-1}, - | -]$ kısmi m -patika ise benzer şekilde $x_i \notin im(a)$ olduğu gösterilir. Her $x \in X_n - im(a)$ için x ile başlayan bir çarpan algoritmanın tanımı gereği mevcut olduğundan öz patika devir ve kısmi m -patikaların sayısı $def(a)$ yı belirlemektedir. Diğer bir ifade ile devir olmayan çarpanların sayısı $pr(a)$, $def(a)$ ile aynı olur. Böylece

$$pcr(a) = def(a) + cycl(a) = pr(a) + cycl(a)$$

eşitliği elde edilir.

(ii) Çarpanlara ayırma algoritmasından dolayı a_i ve a_j patika devirleri ya ayrıktır ya da 1-bağılıdır. Kabul edelim ki $p \geq 2$ ve $i < j$ için a_i ve a_j patika devirleri 1-bağılı, yani bir $x \in X_n$ için $r_1(a_i) \cap r_1(a_j) = \{x\}$ olsun.

a_i çarpanı bir devir olamaz. Aksi halde $a_i = [x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, x_m | x_1]$ bir devir olsaydı

$$[x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, x_m | x_1] = [x_2, \mathbf{K}, x_m, x_1 | x_2] = \mathbf{L} = [x_m, x_1, \mathbf{K}, x_{m-1} | x_m]$$

olduğundan $x_1 = x$ seçebiliriz. Yani genelliği bozmaksızın $a_i = [x, x_2, \mathbf{K}, x_{m-1}, x_m | x]$ alabiliriz. $a^{(i)}$ tanımından her $y \in r_1(a_i) = \{x = x_1, x_2, \mathbf{K}, x_m\}$ için $ya^{(i)} = y$ olup

$$x \in r_1(a_j) \Rightarrow xa^{(i)} = x$$

dir. O halde $xa_j = x$ olacağından $a_j = [y_1, y_2, \dots, y_k, x|x]$ şeklinde tanımlı olur. Bu durumda

$$[y_1, y_2, \dots, y_k, x = x_1, x_2, \dots, x_m | x]$$

devir-patikası a nın a_i den daha uzun çarpanı olurdu ki bu durum çarpanlara ayırma algoritması ile çelişir. Böylece a_i bir devir olamaz.

O halde $a_i = [x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, x_m | x_r]$ ($r \neq 1$) veya $a_i = [x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, -|-]$ şeklindedir. Eğer $a_i = [x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, x_m | x_r]$ devir olmayan bir öz patika-devir ise benzer şekilde, $x \in r_1(a_i)$ için $xa^{(i)} = x$ olup, $x \in r_1(a_i) \cap r_1(a_j)$ ve $i < j$ olduğundan $a_j = [y_1, y_2, \dots, y_k, x|x]$ şeklindedir. Burada $x_1 \neq x$ dir. Aksi halde $x_1 = x$ olsaydı

$$[y_1, y_2, \dots, y_k, x = x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_r | x_r]$$

devir-patikası a nın a_i den daha uzun çarpanı olurdu ki bu durum çarpanlara ayırma algoritması ile çelişir.

Eğer $a_i = [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, -|-]$ bir kısmi m - patika ise bölen tanımından, $x \in r_1(a_i)$ için $xa^{(i)} = x$ olup, $x \in r_1(a_i) \cap r_1(a_j)$ ve $i < j$ olduğundan $a_j = [y_1, y_2, \dots, y_k, x|x]$ şeklindedir. Burada $x_1 \neq x$ dir. Aksi halde $x_1 = x$ olsaydı

$$[y_1, y_2, \dots, y_k, x = x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, -|-]$$

kısmi patikası a nın a_i den daha uzun çarpanı olurdu ki bu durum çarpanlara ayırma algoritması ile çelişir.

Dikkat edilecek olursa a_i nin her iki durumunda da $a_j = [y_1, y_2, \dots, y_k, x | x]$ şeklindedir. Dolayısıyla a_i ve a_j çarpanlarının her ikisi de devir değildir.

(iii) Eğer $a_i = [x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, - | -]$ kısmi m – patikası $a = a_1 a_2 \dots a_p$ nin bir çarpanı ise $x_{m-1} \notin \text{dom}(a)$ olur. (Fakat $a^{(i)}$ nin tanımından $x_{m-1} \in \text{dom}(a^{(i)})$ olur.) Tersine bir $y \in X_n \setminus \text{dom}(a)$ alalım. Eğer $y \notin \text{im}(a)$ ise algoritmadan

$$a_i = [y, - | -] \quad (1 \leq i \leq p)$$

bir çarpan olur.

Eğer $y \in \text{im}(a)$ ise $y_1 = y$ ve $y_2 a = y_1$ olacak şekilde bir $y_2 \in X_n$ seçilir. Seçimden dolayı $y_2 \neq y_1$ olur. Eğer $y_2 \in \text{im}(a)$ ise $y_3 a = y_2$ olacak şekilde bir $y_3 \in X_n$ seçilir. Seçimden dolayı $y_3 \neq y_1$ ve $y_3 \neq y_2$ olur. Böylece, her $1 < i \leq m$ için $y_i \neq y_1, \mathbf{K}, y_{i-1}$ olacak şekilde bir

$$y_m \rightarrow y_{m-1} \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow y_2 \rightarrow y_1 = y$$

dizisi elde edilir. a sonlu bir küme üzerinde bir kısmi dönüşüm olduğundan bu şekilde elde edilen dizi sonlu, yani $y_m \notin \text{im}(a)$ olacak şekilde bir $m \in \mathbf{Z}^+$ vardır. Dolayısıyla algoritmadan

$$a_i = [y_m, \mathbf{K}, y_2, y, - | -] \quad (1 \leq i \leq p)$$

bir çarpan olur. Böylece $kp(a) = n - |\text{dom}(a)|$ eşitliği elde edilir. ■

Teorem 3.3 Bir $a \in PT_n$ nin çarpanlarına ayrılışında a_i ve a_j çarpanlarının değişmeli olması için gerek ve yeter koşul a_i ve a_j lerin ayrık ya da aynı $x \in X_n$ 'e patika olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ a_i ve a_j ayrık olmaları durumu açıktır. Bir $x_0 \in X_n$ için $\{x_1, \mathbf{K}, x_m\} \cap \{y_1, \mathbf{K}, y_r\} = \emptyset$ olmak üzere $a_i = [x_1, \mathbf{K}, x_m, x_0 | x_0]$ ve $a_j = [y_1, \mathbf{K}, y_r, x_0 | x_0]$ olsun. Bu durumda, her $x \in X_n - (\{x_1, \mathbf{K}, x_m\} \cup \{y_1, \mathbf{K}, y_r\})$ için

$$x(a_i a_j) = x = x(a_j a_i)$$

olduğu da açıktır. Her bir $1 \leq i \leq m-1$ için

$$x_i(a_i a_j) = (x_i a_i) a_j = x_{i+1} a_j = x_{i+1} = x_i a_i = (x_i a_j) a_i = x_i(a_j a_i)$$

ve

$$x_m(a_i a_j) = (x_m a_i) a_j = x_0 a_j = x_0 = x_m a_i = (x_m a_j) a_i = x_m(a_j a_i)$$

olur. Benzer şekilde her $1 \leq j \leq r$ için $y_j(a_i a_j) = y_j(a_j a_i)$ de olduğundan $a_i a_j = a_j a_i$ olur. Diğer bir ifade ile a_i ve a_j değişmelidir.

$(\Rightarrow)$ Bu yönü olmayana ergi yöntemi ile ispatlayalım. a_i ve a_j lerin ayrık olmasın, ve ayrıca, a_i ve a_j aynı $x \in X_n$ e patika olmasın. Şimdi genelliği bozmaksızın $i < j$ kabul edelim. Eğer $a_i = [x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, - | -]$ ise Teorem 3.2 den a_j de bir patikadır. Ayrıca, $1 \leq r \leq m-1$ için $r_1(a_i) \cap r_1(a_j) = \{x_r\}$ ve $a_j = [y_1, \mathbf{K}, y_{q-1}, x_r | x_r]$ şeklindedir. Böylece $x_r a_i = x_{r+1}$ veya $x_r a_i \notin \text{dom}(a_i)$ olduğundan

$$y_{q-1}(a_j a_i) = (y_{q-1} a_j) a_i = x_r a_i \neq x_r = y_{q-1} a_j = (y_{q-1} a_i) a_j = y_{q-1}(a_i a_j)$$

elde edilir. Bu durumda $a_j a_i \neq a_i a_j$ dir.

Eğer $a_i = [x_1, \mathbf{K}, x_m | x_r]$ ise benzer şekilde $1 \leq p \leq m$ için $r_1(a_i) \cap r_1(a_j) = \{x_p\}$ ve $a_j = [y_1, \mathbf{K}, y_{q-1}, x_p | x_p]$ şeklindedir. Böylece $x_p a_i = x_{p+1}$ ($p < m$) veya $x_p a_i = x_r$ ($p = m$) ve kabulümüzden $x_r = x_m$ ise $x_r \neq x_p$ olduğundan

$$y_{q-1}(a_j a_i) = (y_{q-1} a_j) a_i = x_p a_i \neq x_p = y_{q-1} a_j = (y_{q-1} a_i) a_j = y_{q-1}(a_i a_j)$$

olur. O halde $a_j a_i \neq a_i a_j$ olup ispat tamamlanır. ■

Bir çarpanlara ayırmada çarpanlardan devir olanlar diğerleri ile ayrıktır. Ayrıca iki kısmi m – patika çarpan mevcut ise kısmi m – patika çarpanlar da ayrıktır. Böylece aşağıdaki sonuca sahibiz.

Sonuç 3.4 Bir $a \in PT_n$ tüm çarpanları devir ya da kısmi patika ise a sıra gözetmeksizin tek türlü çarpanlarına ayrılır. ■

Sonuç 3.5 Bir $a \in PT_n$ için $def(a) = 0$ veya 1 ise a sıra gözetmeksizin tek türlü çarpanlarına ayrılır.

İspat: Bir $a \in PT_n$ için $def(a) = 0$ ise a bir permütasyon olup sonuç açıktır. Biz $def(a) = 1$ için gösterelim. Teorem 3.2 (i) den $a \in PT_n$ nin çarpanlarının sayısı

$$pcr(a) = def(a) + cycl(a) = pr(a) + cycl(a)$$

olup $pr(a) = 1$ olur. Dolayısıyla, Teorem 3.2 (ii) den a nın tüm çarpanları ayrık olur. Böylece a sıra gözetmeksizin tek türlü çarpanlarına ayrılır. ■

Örnek 3.6. $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 10 & 9 & 10 & 11 & 12 & 1 & 10 \end{pmatrix} \in PT_{12}$ olsun. O

zaman $def(a) = 2$ ve

$$a = [1, 3, 5, 7, 9, 11|1][2, 4, 6, 10, 12|10][8, 10|10]$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned} b &= [1, 3, 5, 7, 9, 11|1][8, 10|10][2, 4, 6, 10, 12|10] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 10 & 9 & 12 & 11 & 12 & 1 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olup $8a = 10 \neq 12 = 8b$ olur.

Dolayısıyla, bir $a \in PT_n$ için $def(a) \geq 2$ olduğunda a sıra gözetmeksizin tek türlü çarpanlarına ayrılmayabilir.

4. ÜRETEÇLER VE (m, r) -PATİKA-DEVİRLERİN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Kısmi dönüşümler yarıgrubu PT_n deki elemanların kısmi patika-devirlerin çarpımı biçiminde yazılabildiğini bir önceki bölümde gördük. Şimdi ise bu çarpanlara ayrılışın (parçalanışın) bazı cebirsel özelliklerini araştıracağız.

4.1. Üreteç Kümeleri

Bu bölümde bazı kısmi dönüşümler yarıgrupları $SP_n = PT_n - S_n$ ve $SPT_n = PT_n - T_n$ nin bazı üreteç kümelerini bulacağız.

Giriş bölümünde bahsedildiği üzere Singüler Dönüşüm Yarıgrubu $ST_n = T_n - S_n$, 2-patikalar tarafından üretilir (Teorem 2.29). Önce bu teoremi Kısmi Singüler Dönüşüm Yarıgrubu SP_n ne genelleyelim.

Önerme 4.1 $a \in SP_n$ olsun. O zaman $a = b_1 \mathbf{L} b_k$ olacak şekilde devir olmayan $b_1, \mathbf{K}, b_k$ patika-devirleri vardır.

İspat: $a \in SP_n$ ve yukarda tanımlanan algoritma ile $a = a_1 \mathbf{L} a_p$ şeklinde çarpanlarına ayrılsın. Eğer tüm çarpanlar devir değil ise sonuç açık ($k = p$ ve $b_1 = a_1, \mathbf{K}, b_p = a_p$ alınır). $a \in SP_n$ olduğundan çarpanlardan en az biri devir değildir. Devir olmayan çarpanlardan biri a_i olsun. O zaman Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 den devir olan tüm çarpanları a_i den sonra yazabiliriz. Böylece $a_i = [x_1, \dots, x_m | x_r] (r \neq 1)$ ve $a_j = [y_1, \dots, y_q | y_1]$ bir devir ise $a_j^* = [x_1, y_1, \dots, y_q | y_1]$ olmak üzere $a_i a_j = a_i a_j^*$ olduğundan tüm a_j devirleri devir olmayan a_j^* çarpanlar ile değiştirilir. Benzer şekilde devir olmayan çarpan a_i bir kısmi m -patika, yani $a_i = [x_1, \dots, x_{m-1}, - | -]$ ise a_i den sonra gelen ilk devir a_j ise

$$a_j = [y_1, \dots, y_q | y_1] \text{ ve } a_j^* = [x_1, y_1, \dots, y_q | y_1]$$

olmak üzere $a_i a_j = a_i a_j^*$ olduğundan devir olmayan a_j^* çarpanı ile değiştirilir. Varsa sonraki devirler a_j yerine a_j^* alınarak ilk durumdaki gibi devir olmayan çarpanlar ile değiştirilirse istenilen elde edilir. ■

Örnek 4.2 $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & - & 7 & 9 & 10 & 6 & 12 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in PT_{12}$ ise

$$a = [2, 4, 8, 10, 12 | 2][1, 3, 5, - | -][6, 7, 9 | 6][11, 5 | 5]$$

olur. Ayrıca, Teorem 3.2 den $a = [1, 3, 5, - | -][2, 4, 8, 10, 12 | 2][6, 7, 9 | 6][11, 5 | 5]$ olduğundan, yukarıda ki ispatta kullanılan yöntem ile

$$a = [1, 3, 5, - | -][1, 2, 4, 8, 10, 12 | 2][1, 6, 7, 9 | 6][11, 5 | 5]$$

olur. (Ayrıca $a = [1, 3, 5, - | -][11, 5 | 5][11, 2, 4, 8, 10, 12 | 2][11, 6, 7, 9 | 6]$

olur.)

Önerme 4.3 $2 \leq m \leq n$ olmak üzere $a \in SPT_n$ bir kısmi m -patika olsun. O zaman a kısmi dönüşümü sadece biri kısmi 2-patika olmak üzere, $m-1$ tane 2-patikanın çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: $2 \leq m$ olmak üzere $a = [x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, - | -]$ olsun. O zaman kolayca kontrol edileceği üzere

$$[x_1, \dots, x_{m-1}, - | -] = [x_{m-1}, - | -][x_1, x_2, \dots, x_{m-1} | x_{m-1}]$$

ve

$$[x_1, \dots, x_{r-1}, x_r | x_r] = [x_{r-1}, x_r | x_r] [x_1, x_2, \dots, x_{r-1} | x_{r-1}]$$

olduğundan

$$[x_1, \dots, x_{m-1}, - | -] = [x_{m-1}, - | -] [x_{m-2}, x_{m-1} | x_{m-1}] [x_{m-3}, x_{m-2} | x_{m-2}] \mathbf{L} [x_1, x_2 | x_2]$$

olur. Böylece a , $m-1$ tane 2 -patikanın çarpımı olarak yazılabilir. ■

Önerme 4.1, Teorem 2.29 ve Önerme 4.3 ün bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.4 SP_n 'nin tüm 2 -patikalarının kümesi SP_n ni üretir. ■

Teorem 4.5 Her $2 \leq m \leq n$ için SP_n nin tüm m -patikalarının kümesi SP_n ni üretir.

İspat: Teorem 4.4 de $m=2$ için yapıldı. Biz $m>2$ kabul edelim. Ayrıca $[x_1, x_2 | x_2]$ şeklindeki 2 -patikaların m -patikalar tarafından üretildiğini Teorem 2.30 dan biliyoruz. Böylece sadece kısmi 2 -patikaların $[x_1, - | -]$, (kısmi) m -patikalar tarafından üretildiğini göstermek yeterlidir. Herhangi farklı $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1} \in X_n$ elemanları için

$$a = [x_{m-1}, x_{m-2}, \mathbf{K}, x_2, x_1, - | -]$$

ve

$$b = [x_1, x_2, \dots, x_{m-2}, x_{m-1}, - | -]$$

alındığında $ab = [x_1, - | -]$ olur. Böylece m -patikalar, 2 -patikaları ve dolayısıyla SP_n ni üretir. ■

4.2. Cebirsel Özellikler

Daha önce tanımladığımız üzere $a = [x_1, x_2, \mathbf{K}, x_m | x_1]$ şeklindeki bir patika-devir, bir m -devirdir ve

$$[x_1, x_2, \mathbf{K}, x_m | x_1] = [x_2, x_3, \mathbf{K}, x_m, x_1 | x_2] = \mathbf{L} = [x_m, x_1, \mathbf{K}, x_{m-1} | x_m]$$

eşitliği sağlanır. Bununla beraber $a = [x_1, x_2, \mathbf{K}, x_m | x_r]$ ($r \neq 1$) bir (m, r) -patika-devir veya $a = [x_1, x_2, \mathbf{K}, x_{m-1}, - | -]$ bir kısmi m -patika ise yukarda ki gibi bir eşitlikten söz edilemeyeceğinden aşağıdaki önermeye sahibiz.

Önerme 4.6

1. $1 \leq m \leq n$ için m -devir sayısı $= \frac{n!}{(n-m)!m}$;
2. $2 \leq r \leq m \leq n$ için (m, r) -patika-devir sayısı $= \frac{n!}{(n-m)!} (m-1)$ ve
3. $2 \leq m \leq n+1$ için kısmi m -patika sayısı $= \frac{n!}{(n-m+1)!}$ olur. ■

n=2 için kısmi patika devir yapıları ve sayıları:

1-devir sayısı = 1	$[1 1];$
2-devir sayısı = 1	$[1, 2 1];$
(2, 2)-patika-devir sayısı = 2	$[1, 2 2], [2, 1 1];$
kısmi 2-patika sayısı = 2	$[1, - -], [2, - -]$ ve
kısmi 3-patika sayısı = 2	$[1, 2, - -], [2, 1, - -].$

Ayrıca PT_2 'nin sıfır dönüşümü $[1, -|-][2, -|-]$ vardır.

n=3 için kısmi patika devir yapıları ve sayıları:

1-devir sayısı = 1	$[1 1];$
2 -devir sayısı = 3	$[1,2 1], [1,3 1], [2,3 2];$
(2,2) -patika-devir sayısı = 6	$[1,2 2], [1,3 3], [2,1 1], [2,3 3],$ $[3,1 1], [3,2 2];$
kısmi 2 -patika sayısı = 3	$[1,- -], [2,- -], [3,- -];$
3 -devir sayısı = 2	$[1,2,3 1], [1,3,2 1];$
(3,2) -patika-devir sayısı = 6	$[1,2,3 2], [1,3,2 3], [2,1,3 1], [2,3,1 3],$ $[3,1,2 1], [3,2,1 2];$
(3,3) -patika-devir sayısı = 6	$[1,2,3 3], [1,3,2 2], [2,1,3 3], [2,3,1 1],$ $[3,1,2 2], [3,2,1 1];$
kısmi 3 -patika sayısı = 6	$[1,2,- -], [1,3,- -], [2,1,- -], [2,3,- -],$ $[3,1,- -], [3,2,- -],$
kısmi 4 -patika sayısı = 6	$[1,2,3,- -], [1,3,2,- -], [2,1,3,- -],$ $[2,3,1,- -], [3,1,2,- -], [3,2,1,- -].$

Önce, her bir (m,r) -patika-devir $a = [x_1, x_2, \mathbf{K}, x_m | x_r]$ için $r_2(a) = r_1(a) - \{x_r\}$ olarak tanımlayalım.

Teorem 4.7 Bir $a \in PT_n$ ($n \geq 2$) tüm çarpanları, sırasıyla $a_1, \mathbf{K}, a_p$ olsun.

- (i) $p \leq n$ ve her $1 \leq i \leq p$ için a_i nin indeksi m_i ise $m_p \leq \mathbf{L} \leq m_2 \leq m_1$ olur.
- (ii) $|dom(a)| = m$ olsun. Eğer kısıtlanmış $a|_{doma}$ dönüşümü bir sabit dönüşüm ise $p = n - 1$ olur.
- (iii) Eğer $a \in T_n$ ($n \geq 3$), $p = 2$ ve a_1 'nin indeksi $m_1 = n - 1$ ise a_2 'nin indeksi $m_2 = 2$ olur. Ayrıca a_1 ve a_2 devir değildir; ve $a_2 = [x, y|y]$ şeklinde olup $y \in r_1(a_1) \setminus \{x_1\}$ ve $a_1 = [x_1, \mathbf{K}, x_{n-1}|x_r]$ ($2 \leq r \leq n - 1$) şeklindedir. Dolayısıyla a da bir permütasyon değildir.
- (iv) Eğer $a \in P_n \setminus T_n$, $p = 2$ ve a_1 'nin indeksi $m_1 = n$ ise a_2 'nin indeksi $m_2 = 2$ olur. Üstelik a_1 ve a_2 devir değildir. Ayrıca $a_1 = [x_1, \mathbf{K}, x_{n-1}, -|-]$ iken $a_2 = [x, y|y]$ veya $a_2 = [x, -|-]$ şeklindedir ve $x_1 \notin r_1(a_2)$ olur.

İspat: $a_1, \mathbf{K}, a_p$ ($1 \leq i \leq p$) için a nın çarpanları olsun.

- (i) $m_p \leq \mathbf{L} \leq m_2 \leq m_1$ ifadesi algoritma gereğidir. Her bir a_i ($1 \leq i \leq p$) çarpanı ayrık ya da 1-bağlı olduğundan p en fazla n değerini alır. Buradan $p \leq n$ elde edilir.
- (ii) $|doma| = m$ ve $a|_{doma}$ bir sabit dönüşüm olsun. O zaman, her $x_i \in doma$ için $x_i a = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X_n$ vardır. Her $x \notin doma$ için $[x, -|-]$ şeklinde bir çarpan bulunmak zorunda olup bu tipte tam $n - m$ tane çarpana ihtiyaç vardır. Her $x \in doma$ olmak üzere yazılacak çarpan için iki durum söz konusudur: ya $x_0 \in doma$ veya $x_0 \notin doma$ dır. Eğer $x_0 \in doma$ ise her bir $x_i \in doma$ ($1 \leq i \leq m$) için $a_i = [x_i, x_0|x_0]$ şeklinde $m - 1$ tane çarpana ihtiyaç olacağından $p = m - 1 + n - m = n - 1$ dir. Eğer $x_0 \notin doma$ ise her bir $x_i \in doma$ ($1 \leq i \leq m$) için $a_i = [x_i, x_0, -|-]$ şeklinde m tane çarpana ihtiyaç vardır. Bu durumda dikkat edilirse yukarıda bahsedilen $[x_0, -|-]$ şeklindeki çarpana ihtiyaç olmayıp her $x_0 \neq x \notin doma$ için $[x, -|-]$ şeklinde $n - m - 1$ tane çarpana ihtiyaç olup $p = m + n - m - 1 = n - 1$ dir.

- (iii) $a \in T_n$ için $p=2$ ve $m_1 = n-1$ ise $r_1(a_1) = n-1$ olur. O halde $r_1(a_1) \cap r_1(a_2) \neq \emptyset$ olup Teorem 3.2 den a_1 ve a_2 devir olamaz. Dolayısıyla a da devir değildir. $a_1 = [x_1, \mathbf{K}, x_{n-1} | x_r]$ ($2 \leq r \leq n-1$) için yine Teorem 3.2 den $y \in r_1(a_1) \setminus \{x_1\}$ olarak aldığımızda $x \notin r_1(a_1)$ olmak üzere $a_2 = [x, y | y]$ şeklindedir. Buradan $|r_1(a_2)| = 2$ olup $m_2 = 2$ dir.
- (iv) $a \in P_n \setminus T_n$ için $p=2$ ve $m_1 = n$ olsun. $p=2$ olduğundan $r_1(a_1) = n-1$ olup $a_1 = [x_1, \mathbf{K}, x_{n-1}, - | -]$ şeklinde olmak zorundadır. Eğer $r_1(a_1) \cap r_1(a_2) \neq \emptyset$ ise bir $y \in r_1(a_1) \setminus \{x_1\}$ için $x \notin r_1(a_1)$ olmak üzere $a_2 = [x, y | y]$ olur. Eğer $r_1(a_1) \cap r_1(a_2) = \emptyset$ ise $x \notin r_1(a_1)$ olmak üzere $a_2 = [x, - | -]$ olur. Her iki durumda da a_2 'nin indeksi $m_2 = 2$ olur. Üstelik a_1 ve a_2 devir değildir. Ayrıca $a_1 = [x_1, \mathbf{K}, x_{n-1}, - | -]$ şeklinde iken $a_2 = [x, y | y]$ veya $a_2 = [x, - | -]$ şeklindedir. ■

S bir yarıgrup ve $a \in S$ nin doğurduğu altarıgrup $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \mathbf{K}\}$ olup $\langle a \rangle$ ya S nin bir *monojenik altarıgrubu* denir. Eğer bir $a \in S$ için $S = \langle a \rangle$ ise S ye *monojenik yarıgrup* denir. Ayrıca, her $m, n \in \mathbb{N}$ için $a^m = a^n$ olduğunda $m = n$ ise $\langle a \rangle$ monojenik altarıgrubu sonsuz elemanlı olur. Eğer $a^m = a^n$ ve $m \neq n$ olacak şekilde bir çift m ve n mevcut ise bazı elemanlar tekrar edeceğinden sonlu elemanlı monojenik altarıgrub elde edilir. Buradan

$$m, n \in \mathbb{N} \text{ için } a^{m+r} = a^m$$

eşitliğini sağlayan en küçük m sayısına monojenik yarıgrubunun *indeksi*, en küçük r ye de monojenik yarıgrubunun *periodu* denir. Böylelikle a nın doğurduğu m indeksli, r periodlu sonlu monojenik yarıgrup $M(m, r)$ ile gösterilir ise

$$M(m, r) = \langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \mathbf{K}, a^{m+r-1}\}$$

olur. Ayrıca, kardinalitesi (eleman sayısı) $|\langle a \rangle| = |M(m, r)| = m + r - 1$ olur. Buradan hareketle kısmi dönüşüm yarırubı PT_n deki belirli yapıdaki elemanların doğurduğu monojenik altıarıgrupları ve kardinalitelerini inceleyelim. PT_n 'nin $a = [x_1, \mathbf{K}, x_m | x_1]$ m - devir, $a = [x_1, \mathbf{K}, x_m | x_r]$ ($r \neq 1$) (m, r) - patika ve $a = [x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, - | -]$ m -kısmi patika şeklindeki elemanların doğurduğu monojenik altıarıgrupları inceleyelim. Eğer $a = [x_1, \mathbf{K}, x_m | x_1]$ m - devir ise doğurduğu monojenik altıarıgrup

$$\langle a | a^m = I \rangle = \{a, a^2, \mathbf{K}, a^m = I\} \quad (I \text{ birim dönüşüm})$$

olup $\langle a \rangle$ bir m elemanlı devirli gruptur. Ayrıca

$$a^m = I \Rightarrow a^{1+m} = a^1$$

olduğundan indeksi 1 ve periodu m olan $M(1, m)$ monojenik altıarıgruptur. Eğer $a = [x_1, \mathbf{K}, x_m | x_r]$ ($r \neq 1$) yapısında ise a nın doğurduğu monojenik altıarıgrup

$$\langle a | a^m = a^{r-1} \rangle = \{a, a^2, \mathbf{K}, a^{m-1}\}$$

olup kardinalitesi $m-1$ olur. Ayrıca $\langle a \rangle = M((r-1), m-(r-1))$ olur. Gerçekten,

$$a^m = a^{(r-1)+[m-(r-1)]} = a^{r-1}$$

olur. Eğer $a = [x_1, \mathbf{K}, x_{m-1}, -|-]$ yapısında ise a nın doğurduğu monojenik altıyarıgrup

$$\langle a | a^{m-1} = 0 \rangle = \{ \emptyset, a, a^2, \mathbf{K}, a^{m-2} \}$$

(burada $\emptyset = [1, -|-][2, -|-]\mathbf{L}[n, -|-]$ boş dönüşümdür; yani 0 sıfır elemandır). Dolayısıyla $\langle a \rangle$ bir $m-1$ elemanlı monojenik yarıgruptur. Ayrıca

$$a^{m-1} = 0 \Rightarrow a^m = 0$$

$$a^{(m-1)+1} = a^{m-1}a = 0a = 0 = a^{m-1}$$

olacağından $\langle a \rangle = M(m-1, 1)$ indeksi $m-1$, periodu 1 olan monojenik altıyarıgrup olur.

Aşağıda PT_2 ve PT_3 yarıgrupların elemanlarının devir-patika yapıları, sayıları ve doğurduğu monojenik altıyarı grubun kardinalitesi verilmiştir:

<u>PT_2</u>		
Yapısı	Sayısı	Kardinalitesi
$[1 1]$	1	1
$[1, 2 1]$	1	2
$[1, 2 2]$	2	1
$[1, - -]$	2	1
$[1, 2, - -]$	2	2
$[1, - -][2, - -]$	1	1
<u>PT_3</u>		

4. ÜRETEÇLER VE (m,r)-PATİKA DEVİRLERİN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ
Fatma ÇİNAR

Yapısı	Sayısı	Kardinalitesi
$[1 1]$	1	1
$[1,2 1]$	3	2
$[1,2 2]$	6	1
$[1,2,3 1]$	2	3
$[1,2,3 k] (k \in \{2,3\})$	12	2
$[1,2 2][3,2 2]$	3	1
$[1,- -]$	3	1
$[1,2,- -]$	6	2
$[1,2,3,- -]$	6	3
$[1,- -][2,- -]$	3	1
$[1,- -][2,3 3]$	6	1
$[1,- -][2,3 2]$	3	2
$[1,2,- -][3,- -]$	6	2
$[1,2,- -][3,2 2]$	3	2
$[1,- -][2,- -][3,- -]$	1	1

5. KISMİ SIRAKORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUBU

$X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ olmak üzere X_n üzerindeki singüler dönüşümler yarıgrubu $Sing_n(ST_n)$ olsun. O zaman

$$O_n = \{a \in Sing_n : (\forall x, y \in X_n) x \leq y \Rightarrow xa \leq ya\}$$

kümesinde bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup buna *sırakoruyan dönüşüm* yarıgrubu denir (bkz. Howie, 1971). Benzer şekilde *kısmi sırakoruyan dönüşüm* yarıgrubu

$$PO_n = O_n \cup \{a : doma \subset X_n (\forall x, y \in doma) x \leq y \Rightarrow xa \leq ya\}$$

şeklinde tanımlı olup $|PO_n| = \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} \binom{n+r-1}{n-1} - 1$ dir (Gomes ve Howie, 1992). Bu bölümde sırakoruyan dönüşüm yarıgrubunda tanımlı bazı teoremleri ve *m-patika* rankını verip, bunları kısmi sırakoruyan dönüşüm yarıgrubunda genelleyeceğiz.

5.1. Sırakoruyan Dönüşüm Yarıgrubu

Sırakoruyan dönüşüm yarıgrubu ile ilgili bazı kombinatorik hesaplamalar Howie tarafından 1971’de yapılmış. Örneğin; eleman sayısı $|O_n| = \binom{2n-1}{n-1} - 1$ olarak hesaplanmış, O_n ’nin tüm idempotentlerinin kümesinin eleman sayısı $2n$.inci Fibonacci sayısı f_{2n} ($f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ ($n \geq 2$)) olmak üzere $f_{2n} - 1$ olduğu ve O_n , defekti 1 olan idempotentlerinin kümesi

$$E_1 = \{a \in O_n : a^2 = a \text{ ve } |im(a)| = n-1\}$$

tarafından doğrulduğu göstermişlerdir.

Gomes ve Howie 1992’de yayınlanan çalışmalarında O_n nin rankının n (yani $rank(O_n) = n$) ve idempotent rankının $2n-2$ (yani $idrank(O_n) = 2n-2$) olduğunu göstermişlerdir.

A kümesi, ST_n deki m -patika devirlerin kümesi olsun. $S \subset ST_n$ altıyarıgrubu, A kümesi tarafından doğruluyorsa; A ya S için bir m -patika doğuray kümesi denir. Üstelik

$$m-rank(S) = \min \{ |A| : A, S \text{ için } m\text{-patika doğuray kümesidir} \}$$

değerine S nin m -rankı denir.

Sırakoruyan dönüşüm yarıgrubunda defekti 1 olan her elemanın m -patika-devir olarak yazılabileceği Gomes ve Howie (1992) de gösterilmiştir. Burada, her $2 \leq m \leq n$ ve $1 \leq i \leq n-m+1$ için defekti 1 olan m -patika-devirlerini, Ayık, Ayık ve Howie (2005) de kullandıkları notasyon ile aşağıdaki şekilde ifade edelim:

$$a_{m,i} = [i, i+1, \mathbf{K}, i+m-1 | i+m-1]$$

$$b_{m,i} = [i+m-1, i+m-2, \mathbf{K}, i | i]$$

m -patika-devirlerinin kümesini

$$A_m = \{ a_{m,i}, b_{m,i} : 1 \leq i \leq n-m+1 \}$$

olarak alırsak $|A_m| = 2(n-m+1)$ olur. Özel olarak $m=2$ için

$$e_i = [i, i+1 | i+1] \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

$$d_i = [i, i-1 | i-1] \quad (2 \leq i \leq n)$$

defekti 1 olan idempotentlerin kümesi $E_1 = \{e_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{d_i : 2 \leq i \leq n\}$ olur.

Ayrıca

$$g = [n, n-1, \mathbf{K}, 2, 1|1]$$

olmak üzere $A = \{e_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{g\}$ olsun. Bu notasyonlar ile Gomes ve Howie (1992) aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir.

Teorem 5.1 $2 \leq n$ için

- (i) $O_n = \langle A \rangle$ ve $\text{rank}(O_n) = n$ dir; ve
- (ii) $O_n = \langle E_1 \rangle$ ve $\text{idrank}(O_n) = 2n - 2$ dir. ■

Önerme 5.2 $2 \leq m \leq n$ için

$$b_{m,i} a_{m,i} = e_i \quad (1 \leq i \leq n-m+1) \quad (1)$$

$$a_{m,i} b_{m,i} = d_{i+m-1} \quad (1 \leq i \leq n-m+1) \quad (2)$$

$$a_{m,i+1} b_{m,i} = e_{i+m-1} \quad (1 \leq i \leq n-m) \quad (3)$$

$$b_{m,i} a_{m,i+1} = d_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-m) \quad (4)$$

olur.

İspat: $2 \leq m \leq n$ olsun. O zaman, her $1 \leq i \leq n-m+1$ için

$$\begin{aligned} b_{m,i} a_{m,i} &= [i+m-1, i+m-2, \mathbf{K}, i|i][i, i+1, \mathbf{K}, i+m-1|i+m-1] \\ &= [i, i+1|i+1] = e_i \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
a_{m,i}b_{m,i} &= [i, i+1, \mathbf{K}, i+m-1 | i+m-1][i+m-1, i+m-2, \mathbf{K}, i | i] \\
&= [i+m-1, i+m-2 | i+m-2] = d_{i+m-1}
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, her $1 \leq i \leq n-m$ için

$$\begin{aligned}
a_{m,i+1}b_{m,i} &= [i+1, i+2, \mathbf{K}, i+m | i+m][i+m-1, i+m-2, \mathbf{K}, i | i] \\
&= [i+m-1, i+m | i+m] = e_{i+m-1}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
b_{m,i}a_{m,i+1} &= [i+m-1, i+m-2, \mathbf{K}, i | i][i+1, i+2, \mathbf{K}, i+m | i+m] \\
&= [i+1, i | i] = d_{i+1}
\end{aligned}$$

olur. ■

Teorem 5.3 $A_m = \{a_{m,i}, b_{m,i} : 1 \leq i \leq n-m+1\}$ kümesinin O_n için bir doğuray

kümesi olması için gerek ve yeter koşul $m \leq \frac{n+2}{2}$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ A_m kümesi O_n için doğuray kümesi olsun. O zaman $\text{rank}(O_n) = n$ olduğundan

$$|A_m| = 2(n-m+1) \geq n$$

eşitsizliği gerçekleşir. Buradan da $m \leq (n+2)/2$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Önerme 5.2 den defekti 1 olan idempotentler,

$$e_1, e_2, \mathbf{K}, e_{n-m+1}, e_m, e_{m+1}, \mathbf{K}, e_{n-1} \quad ((1) \text{ ve } (3))$$

$$d_2, d_3, \mathbf{K}, d_{n-m+1}, d_m, d_{m+1}, \mathbf{K}, d_n \quad ((2) \text{ ve } (4))$$

$\langle A_m \rangle$ kümesinin elemanlarıdır. Yukarıdaki listede defekti 1 olan tüm idempotentler mevcut olacağından $n - m + 1 \geq m - 1$ olması gerekir. Bu ise $m \leq (n + 2)/2$ eşitsizliği gerektirir. ■

Örnek 5.4 O_3 deki 3-patikaların kümesi $A_3 = \{[1, 2, 3|3], [3, 2, 1|1]\}$ olur. $m > \frac{n+2}{2}$ olduğundan O_3 'ü doğurmaz. Gerçekten $|O_3| = 9$ ve $|\langle A_3 \rangle| = 7$ dir.

5.2. Kısmi Sırankoruyan Dönüşüm Yarigrubu

Kısmi sırankoruyan dönüşüm yarigrubu $PO_n \subset P_n$ olduğundan PO_n nin elemanlarını da çarpanlarına ayırma metodunu kullanarak *kısmi-patika-devirlerin* çarpımı biçiminde yazabiliriz.

$a \in PO_n$ ve $x \in X_n$ için çarpanlarına ayırma metodu gereği $x \rightarrow xa \rightarrow xa^2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow xa^m$ biçiminde sonlu bir dizi mevcuttur. Buradan hareketle kısmi sırankoruyan dönüşüm yarigrubu PO_n nin elemanlarını kısmi patika devirler olarak $a = [x, xa, xa^2, \mathbf{K}, xa^m | xa^r]$ veya $a = [x, xa, \mathbf{K}, xa^{m-2}, - | -]$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $x < xa$ için PO_n nin tanımından $(x)a < (xa)a$ yani $xa < xa^2$ olup bu şekilde devam edildiğinde $x < xa < xa^2 < \mathbf{L} < xa^m$ eşitsizlikleri elde edilir. Benzer şekilde $x > xa$ için de $x > xa > xa^2 > \mathbf{L} > xa^m$ eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 5.5 $a \in PO_n$ ve $a = a_1 a_2 \mathbf{L} a_p$ için $def a = m$ ise $pcra = m$ olur.

İspat: $1 \leq i \leq p$ için a_i , a nın bir çarpanı ve $x \in X_n$ olsun. Hiçbir çarpanın bir devir olamayacağını göstermek yeterlidir.

Eğer $a_i = [x, xa, \mathbf{K}, xa^{m-1} | x]$ ve $x < xa < \mathbf{L} < xa^{m-1}$ ise $x < xa < \mathbf{L} < xa^m = x$ olur ki bu PO_n tanımı ile çelişir. Benzer şekilde $a_i = [x, xa, \mathbf{K}, xa^{m-1} | x]$ ve $x > xa > \mathbf{L} > xa^{m-1} > xa^m = x$ de olamaz.

Dolayısıyla a_i bir devir olamaz yani, $cycla = 0$ olur. Böylece $pcra = def a + cycla$ eşitliğinden $pcra = def a = m$ elde edilir. ■

Eğer sadece defekti 1 olan elemanlarla ilgilenilir ise her $a \in PO_n$ ve $def(a) = 1$ için Sonuç 3.5 ve Teorem 5.5 den a bir tek çarpandan ibaret olup tek türlü çarpanlarına ayrılır.

Teorem 5.6 $a \in O_n$ için $def(a) = 1$ ise a , bir m -patika dır.

İspat: $a \in O_n$ ve $def(a) = 1$ ise Teorem 5.5 den a bir patika-devir olup bir devir olamaz. Dolayısıyla $1 < r \leq m$ için $a = [x, xa, \mathbf{K}, xa^m | xa^r]$ biçimindedir. O_n nin tanımından $xa^{m-1} < xa^m$ iken $xa^m \leq xa^{m+1} = xa^r$ olduğundan $r = m$ ve $xa^{m-1} > xa^m$ iken $xa^m \geq xa^{m+1} = xa^r$ olduğundan $r = m$ olur. Böylece her iki durumda da a bir m -patikadır (ayrıca bkz. Gomes ve Howie (1992)).

Gomes ve Howie (1992), O_n deki defekti 1 olan elemanların m -patika devir yapısını $x \in X_n$ için $a = [x, x+1, \mathbf{K}, x+m-1 | x+m-1]$ ya da $a = [x+m-1, x+m-2, \mathbf{K}, x+1, x | x]$ biçiminde göstermiştir. Şimdi $a \in SPO_n = PO_n - O_n$ için kısmi m -patika yapısını inceleyelim:

Teorem 5.7 $a \in SPO_n$ için $def(a) = 1$ olsun. O zaman a bir kısmi m -patikadır, ve ayrıca, bir $x \in X_n$ için $a = [x, x+1, \mathbf{K}, x+m-2, - | -]$ veya $a = [x, x-1, \mathbf{K}, x-m+2, - | -]$ şeklindedir.

İspat: $a \in SPO_n$ ve $def(a) = 1$ olsun. O zaman $|dom(a)| \geq n-1$ ve $dom(a) \neq X_n$ olduğundan $|dom(a)| = n-1$ olur. Böylece Teorem 5.5 den bir $x \in X_n$ için $a = [x, xa, \mathbf{K}, xa^{m-2}, - | -]$ biçiminde olacaktır. Ayrıca, herhangi bir $y \in X_n$ için $ya = y$ olsun. Eğer $1 \leq k \leq m-2$ için $xa^k < y < xa^{k+1}$ olsaydı PO_n nin tanımı gereği

$xa^{k+1} < ya = y < xa^{k+2}$ olur ki bu $xa^{k+1} < y < xa^{k+1}$ çelişkisini verir. O halde, her $1 \leq k \leq m-2$ için xa^k ile xa^{k+1} arasında öyle bir $y \in X_n$ yoktur. Buradan $x < xa < \mathbf{K} < xa^{m-2}$ ya da $x > xa > \mathbf{K} > xa^{m-2}$ olduğundan

$$a = [x, x+1, \mathbf{K}, x+m-2, -|-]$$

ya da

$$a = [x, x-1, \mathbf{K}, x-m+2, -|-]$$

şeklindedir. ■

5.2.1. Kısmi m-patika Doğuray Kümesi

A , defekti 1 olan *kısmi m-patika devirlerin* kümesi olsun. Eğer bir $S \subset PO_n$ altyarıgrubu, A kümesi tarafından doğruluyor ise A ya S için bir *kısmi m-patika doğuray kümesi* denir. Ayrıca

$$m\text{-rank}(S) = \min \{ |A| : A, S \text{ için } \textit{kısmi m-patika doğuray} \text{ kümesidir} \}$$

sayısına S nin *m-rankı* denir. PO_n deki patikalar artan ya da azalan olduğundan defekti 1 olan kısmi olmayan ve olan *m-patika devirleri* aşağıdaki gibi seçebiliriz:

Her $2 \leq m \leq n$ ve $1 \leq i \leq n-m+1$ için

$$a_{m,i} = [i, i+1, \mathbf{K}, i+m-1 | i+m-1]$$

ve

$$b_{m,i} = [i+m-1, i+m-2, \mathbf{K}, i | i]$$

olsun. Her $2 \leq m \leq n+1$ ve $1 \leq i \leq n-m+2$ için

$$j_{m,i} = [i, i+1, \mathbf{K}, i+m-2, -|-]$$

ve

$$f_{m,i} = [i+m-2, i+m-3, \mathbf{K}, i, -|-]$$

olsun. Ayrıca, her $2 \leq m \leq n$ için

$$A_m^* = \{a_{m,i}, b_{m,i} \mid 1 \leq i \leq n-m+1\} \cup \{j_{m,i}, f_{m,i} \mid 1 \leq i \leq n-m+2\}$$

ve

$$A_{n+1}^* = \{j_{n+1,1}, f_{n+1,1}\} = \{[1, 2, \mathbf{K}, n, -|-], [n, n-1, \mathbf{K}, 1, -|-]\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, her $2 \leq m \leq n+1$ için

$$|A_m^*| = 2(n-m+1) + 2(n-m+2) = 4n - 4m + 6$$

olur. Özel olarak PO_n deki defekti 1 olan idempotentlerin,

$$e_i = [i, i+1 \mid i+1] \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

$$d_i = [i, i-1 \mid i-1] \quad (2 \leq i \leq n)$$

$$g_i = [i, -|-] \quad (1 \leq i \leq n)$$

kümesi $E_1^* = \{e_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{d_i : 2 \leq i \leq n\} \cup \{g_i : 1 \leq i \leq n\}$ olur.

Şimdi $a_1 \in SPO_n$ dönüşümü $dom(a_1) = X_n - \{1\}$ ve $im(a_1) = X_n - \{n\}$ olarak ve her $i = 2, 3, \mathbf{K}, n$ için $a_i \in SPO_n$ dönüşümlerini de $dom(a_i) = X_n - \{i\}$ ve $im(a_i) = X_n - \{i-1\}$ olarak tanımlayalım. Her $i = 1, 2, \mathbf{K}, n$ için $|dom(a_i)| = |im(a_i)| = (n-1)$ olduğundan $a_i \in SPO_n$ dönüşümleri tek türlü belirlidir. Örneğin, $n = 4$ için

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ - & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & - & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & - & 4 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & - \end{pmatrix}$$

olur. Yukarda ki notasyonlar ile

$$A^* = \{e_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{a_i : 1 \leq i \leq n\}$$

alınır ise Gomes ve Howie (1992) aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir.

Teorem 5.8 $2 \leq n$ için

- (i) $PO_n = \langle A^* \rangle$ ve $\text{rank}(PO_n) = 2n-1$ dir; ve
- (ii) $PO_n = \langle E_1^* \rangle$ ve $\text{idrank}(PO_n) = 3n-2$ dir. ■

Önerme 5.9 Her $2 \leq m \leq n$ için

$$b_{m,i} a_{m,i} = e_i \quad (1 \leq i \leq n-m+1) \quad (1)$$

$$a_{m,i} b_{m,i} = d_{i+m-1} \quad (1 \leq i \leq n-m+1) \quad (2)$$

$$a_{m,i+1} b_{m,i} = e_{i+m-1} \quad (1 \leq i \leq n-m) \quad (3)$$

$$b_{m,i} a_{m,i+1} = d_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-m) \quad (4)$$

ve

her $2 \leq m \leq n+1$ için

$$j_{m,i} f_{m,i} = g_{i+m-2} \quad (1 \leq i \leq n-m+2) \quad (5)$$

$$f_{m,i} j_{m,i} = g_i \quad (1 \leq i \leq n-m+2) \quad (6)$$

olur.

İspat: (1)-(4) eşitliklerin ispatı Önerme 5.2 de yapıldı. Biz diğerlerini yapalım:

Her $2 \leq m \leq n+1$ ve $1 \leq i \leq n-m+2$ için

$$\begin{aligned} j_{m,i} f_{m,i} &= [i, i+1, \mathbf{K}, i+m-2, -|-] [i+m-2, i+m-3, \mathbf{K}, i, -|-] \\ &= [i+m-2, -|-] = g_{i+m-2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_{m,i} j_{m,i} &= [i+m-2, i+m-3, \mathbf{K}, i, -|-] [i, i+1, \mathbf{K}, i+m-2, -|-] \\ &= [i, -|-] = g_i \end{aligned}$$

olur. ■

Önerme 5.10 $a, b \in PO_n$ olsun. Ayrıca $1 \leq i < k \leq n$ ve $1 \leq j < l \leq n$ olmak üzere

$$a = [i, i+1, \mathbf{K}, k-1, k|k] \quad \text{ve} \quad b = [j, j+1, \mathbf{K}, l-1, l|l]$$

olsun. Eğer $i = l-1$ veya $i = l$ ise ab çarpımının da defekti 1 olur. Ayrıca ab bir artan $(k-j+1) - patika$ -devirdir.

İspat: $1 \leq i < k \leq n$ ve $1 \leq j < l \leq n$ olmak üzere

$$a = [i, i+1, \mathbf{K}, k-1, k|k] \quad \text{ve} \quad b = [j, j+1, \mathbf{K}, l-1, l|l]$$

olsun.

Eğer $i = l-1$ ise

$$\begin{aligned} ab &= [l-1, l, \mathbf{K}, k-1, k|k] [j, j+1, \mathbf{K}, l-1, l|l] \\ &= [j, j+1, \mathbf{K}, l-1, l, l+1, \mathbf{K}, k-1, k|k] \end{aligned}$$

olup ab bir artan $(k-j+1)$ -*patika*-devirdir.

Eğer $i=l$ ise

$$\begin{aligned} ab &= [l, l+1, \mathbf{K}, k-1, k|k][j, j+1, \mathbf{K}, l-1, l|l] \\ &= [j, j+1, \mathbf{K}, l-1, l, l+1, \mathbf{K}, k-1, k|k] \end{aligned}$$

olup ab bir artan $(k-j+1)$ -*patika*-devirdir. ■

Önerme 5.11 $a, b \in PO_n$ olsun. Ayrıca $1 \leq k < i \leq n$ ve $1 \leq l < j \leq n$ olmak üzere

$$a = [i, i-1, \mathbf{K}, k+1, k|k] \quad \text{ve} \quad b = [j, j-1, \mathbf{K}, l+1, l|l]$$

olsun. Eğer $i=l$ veya $i=l+1$ ise ab çarpımının da defekti 1 olur. Ayrıca ab bir azalan $(k-j+1)$ -*patika*-devirdir.

İspat $1 \leq k < i \leq n$ ve $1 \leq l < j \leq n$ olmak üzere

$$a = [i, i-1, \mathbf{K}, k+1, k|k] \quad \text{ve} \quad b = [j, j-1, \mathbf{K}, l+1, l|l]$$

olsun.

Eğer $i=l$ ise

$$\begin{aligned} ab &= [l, l-1, \mathbf{K}, k+1, k|k][j, j-1, \mathbf{K}, l+1, l|l] \\ &= [j, j-1, \mathbf{K}, l+1, l, l-1, \mathbf{K}, k+1, k|k] \end{aligned}$$

olup ab bir azalan $(k-j+1)$ -*patika*-devirdir.

Eğer $i=l+1$ ise

$$\begin{aligned}
ab &= [l+1, l, \mathbf{K}, k+1, k|k][j, j-1, \mathbf{K}, l+1, l|l] \\
&= [j, j-1, \mathbf{K}, l+1, l, l-1, \mathbf{K}, k+1, k|k]
\end{aligned}$$

olup ab bir azalan $(k-j+1)-patika$ -devirdir. ■

Önerme 5.12 $a, b \in PO_n$ olsun. Ayrıca $1 \leq i < k \leq n+1$ ve $1 \leq j < l \leq n+1$ olmak üzere

$$a = [i, i+1, \mathbf{K}, k-1, -|-] \quad \text{ve} \quad b = [j, j+1, \mathbf{K}, l-1, -|-]$$

olsun. Eğer $i = l-1$ ise ab çarpımının da defekti 1 olur. Ayrıca ab bir artan kısmi $(k-j+1)-patika$ dır.

İspat: $1 \leq i < k \leq n+1$ ve $1 \leq j < l \leq n+1$ olmak üzere

$$a = [i, i+1, \mathbf{K}, k-1, -|-] \quad \text{ve} \quad b = [j, j+1, \mathbf{K}, l-1, -|-]$$

olsun.

Eğer $i = l-1$ ise

$$\begin{aligned}
ab &= [l-1, l, \mathbf{K}, k-1, -|-][j, j+1, \mathbf{K}, l-1, -|-] \\
&= [j, j+1, \mathbf{K}, l-1, l, l+1, \mathbf{K}, k-1, -|-]
\end{aligned}$$

olup ab bir artan kısmi $(k-j+1)-patika$ dır. ■

Önerme 5.13 $a, b \in PO_n$ olsun. Ayrıca $1 \leq i < k \leq n+1$ ve $1 \leq j < l \leq n+1$ olmak üzere

$$a = [i, i-1, \mathbf{K}, k+1, -|-] \quad \text{ve} \quad b = [j, j-1, \mathbf{K}, l+1, -|-]$$

olsun. Eğer $i = l + 1$ ise ab çarpımının da defekti 1 olur. Ayrıca ab bir azalan kısmi $(k - j + 1) - patika$ dır.

İspat: $0 \leq k < i \leq n$ ve $0 \leq l < j \leq n$ olmak üzere

$$a = [i, i-1, \mathbf{K}, k+1, -| -] \quad \text{ve} \quad b = [j, j-1, \mathbf{K}, l+1, -| -]$$

olsun.

Eğer $i = l + 1$ ise

$$\begin{aligned} ab &= [l+1, l, \mathbf{K}, k+1, -| -][j, j-1, \mathbf{K}, l+1, -| -] \\ &= [j, j-1, \mathbf{K}, l+1, l, l-1, \mathbf{K}, k+1, -| -] \end{aligned}$$

olup ab bir azalan kısmi $(k - j + 1) - patika$ dır. ■

Şimdi yukarıda ki notasyonlar ile bu bölümün temel teoremini ifade ve ispat edebiliriz:

Teorem 5.14 $n \geq 2$ olsun. O zaman

$$A_m^* = \{a_{m,i}, b_{m,i} \mid 1 \leq i \leq n - m + 1\} \cup \{j_{m,i}, f_{m,i} \mid 1 \leq i \leq n - m + 2\}$$

kümesinin PO_n için bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul $m \leq \frac{2n+7}{4}$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ A_m^* kümesi PO_n için doğuray kümesi olsun. O zaman $rank(PO_n) = 2n - 1$ olduğundan

$$|A_m^*| = 4n - 4m + 6 \geq 2n - 1$$

eşitsizliği gerçekleşir. Buradan da $m \leq \left(\frac{2n+7}{4}\right)$ elde edilir.

$(\Leftrightarrow) m \leq \left(\frac{2n+7}{4}\right)$ olsun. O zaman Önerme 5.9 dan defekti 1 olan idempotentler,

$$e_1, e_2, \mathbf{K}, e_{n-m+1}, e_m, e_{m+1}, \mathbf{K}, e_{n-1} \quad ((1) \text{ ve } (3))$$

$$d_2, d_3, \mathbf{K}, d_{n-m+1}, d_m, d_{m+1}, \mathbf{K}, d_n \quad ((4) \text{ ve } (2))$$

$$g_1, g_2, \mathbf{K}, g_{n-m+2}, g_{m-1}, g_m, \mathbf{K}, g_n \quad ((6) \text{ ve } (5))$$

$\langle A_m^* \rangle$ kümesinin elemanları olur. Böylece $\left(\frac{n+2}{2} < \frac{2n+7}{4}\right)$ olup Teorem 5.3 de ki gibi $E_1 \subset \langle A_m^* \rangle$ olur. Ayrıca

$$n - m + 2 \geq n - \left(\frac{2n+7}{4}\right) + 2 = \frac{2n+1}{4} > \frac{2n-1}{4} \geq m - 2$$

olduğundan $g_1, g_2, \mathbf{K}, g_{n-m+2}, g_{m-1}, g_m, \mathbf{K}, g_n \in \langle A_m^* \rangle$ olup $E_1^* \subset \langle A_m^* \rangle$ olur. Böylece Teorem 5.3 den $PO_n = \langle E_1^* \rangle$ olduğu bilindiğinden A_m^* kümesi PO_n için bir doğuray kümesi olur. ■

KAYNAKLAR

- AYIK, G., AYIK, H. and HOWIE, J.M., 2005. On Factorisations and Generators in Transformation Semigroups. *Semigroup Forum*, 70: 225—237
- AYIK, G., AYIK, H., HOWIE, J.M. and ÜNLÜ, Y., 2005a. The Structure of Elements in Finite Full Transformation Semigroups. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 71: 69—74.
- AYIK, G., AYIK, H., HOWIE, J.M. and ÜNLÜ, Y., 2005b. Rank Properties of the Semigroup of Singular Transformations on a Finite Set. *Communications in Algebra*, 36: 2581—2587.
- GARBA, G.U., 1994a. On the Nilpotent Rank of Partial Transformation Semigroups. *Portugal.Math.*, 51(2):163-172.
- _____, 1994b. On The Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-preserving Transformations. *Portugal.Math.*, 51(2):185—204.
- GOMES, G.M.S. and HOWIE, J.M. , 1992. On The Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving transformations. *Semigroup Forum*, 45:272—282.
- HOWIE, J.M., 1971. Prodcuts of Idempotents in Certain Semigroups of Transformations. *Proc.Edingburg Math Soc.*, (2) 17:223—236.
- HOWIE, J.M., 1995. Fundamentals of semigroup theory. London Mathematical Society Monographs. New Series, 12. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 351s.
- ROTMAN, J. J. 1994. An Introduction to the Theory of Groups. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 536s.
- TAINITER, M., 1968. A characterization of idempotent in semigroups. *J. Combinatorial Theory*, (5):370—373.

ÖZGEÇMİŞ

05/03/1979 yılında Adana’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladı. 1998 yılında başladığı Balıkesir Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü’nden 2003 yılında mezun oldu ve 2004 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünde lisans üzerine doktora eğitimine başladı ve halen devam etmektedir.