

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Figen GÜLTÜRK

İTERPOLASYON VE KALAN TEORİSİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2008

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İTERPOLASYON VE KALAN TEORİSİ

Figen GÜLTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez/...../..... Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği İle Kabul Edilmiştir.

İmza:.....

İmza:.....

İmza:.....

Yrd.Doç.Dr.Yusuf KARAKUŞ

Prof.Dr.Doğan DÖNMEZ

Yrd.Doç.Dr.Mehmet AÇIKGÖZ

DANIŞMAN

ÜYE

ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof.Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü

İmza ve Mühür

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin ve şekillerin kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNTERPOLASYON VE KALAN TEORİSİ

Figen GÜLTÜRK

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Yrd.Doç.Dr.Yusuf KARAKUŞ

Yıl : 2008, **Sayfa:** 68

Jüri : Yrd.Doç.Dr.Yusuf KARAKUŞ

Prof.Dr.Doğan DÖNMEZ

Yrd.Doç.Dr.Mehmet AÇIKGÖZ

Bu çalışmada Lagrange İnterpolasyon Polinomları ve Newton İnterpolasyon Polinomları incelenmiştir. Ayrıca Kalan Teorisinde bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İnterpolasyon, Kalan Teorisi, Chebyshev Polinomları, Lineer Fonksiyoneller.

ABSTRACT

MSc THESIS

INTERPOLATION and REMAINDER THEORY

Figen GÜLTÜRK

DEPARTMENT of MATHEMATICS

INSTITUTE of NATURAL and APPLIED SCIENCES

UNIVERSITY of ÇUKUROVA

Supervisor : Yrd.Doç.Dr.Yusuf KARAKUŞ

Year : 2008, **Sayfa:** 68

Jury : Yrd.Doç.Dr.Yusuf KARAKUŞ

Assoc.Prof.Dr.Doğan DÖNMEZ

Yrd.Doç.Dr.Mehmet AÇIKGÖZ

In this thesis, Lagrange Interpolation Polynomials and Newton Interpolation Polynomials were studied. Additionally, some results were obtained in the Remainder Theory.

Key Words: Interpolation, Remainder Theory, Chebyshev Polynomials, Linear Functionals.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamda hiçbir özveriden kaçınmadan aydınlatıcı fikirleri ile bu eserin meydana getirilmesini sağlayan saygıdeğer hocam, Sayın Yrd.Doç.Dr. Yusuf KARAKUŞ 'a ve ders aşamasından yazım aşamasına kadar geçen sürede her türlü manevi desteklerinden dolayı sevgili eşim Şeref GÜLTÜRK'e ve anneme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
2.1. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümleri	2
2.2. Türevlenebilir (Diferansiyellenebilir) Fonksiyonlar.....	4
2.3. Polinomlar	6
2.4. Lineer Fonksiyoneller ve Cebirsel Dual (Eşlenik) Uzaylar.....	7
3. İNTERPOLASYON.....	10
3.1. Polinomlarla İnterpolasyon.....	10
3.2. Sonlu İnterpolasyonun Genel Problemi.....	12
3.3. İnterpolasyon Özelliğine Sahip Olan Sistemler.....	14
3.4. Çözümün Tekliği	18
3.5. Lagrange İnterpolasyon Formülü	20
3.6. Newton Formülü.....	25
3.7. Ardışık Farklar	35
4. KALAN TEORİSİ	40
4.1. Polinomlarla İnterpolasyon İçin Cauchy Kalanı.....	40
4.2. Konveks Fonksiyonlar	45
4.3. En İyi Hata Tahminleri; Chebyshev Polinomları.....	47
4.4. Kesirli Farklar ve Ortalama Değer	54
4.5. Peano Teoremi ve Sonuçları	59
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ	68

1.GİRİŞ

Bu tezde İnterpolasyon Kavramı ve Kalan Teorisi incelenmiştir. İnterpolasyon genel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

I aralığında tanımlı ve sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu verilsin. I nın $n+1$ tane farklı noktası $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun. P_n , n -inci dereceden polinomlar kümesini gösterebilir.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad x_i \in I \quad i = 0, 1, \dots, n$$

olacak şekilde bir $p \in P_n$ polinomu bulma işlemine interpolasyon ve $p(x)$ polinomuna da x_i noktalarında $f(x)$ için interpolasyon polinomu denir. x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ noktalarına ise, interpolasyon düğümleri adı verilir.

Bu çalışmada İnterpolasyonla ilgili teoremler, sonuçlar ve ilgili örnekler verildikten sonra kalan teorisi ele alınmıştır.

Polinomlarla İnterpolasyon İçin Cauchy Kalanı, Lineer İnterpolasyon İçin Hata ve En İyi Hata Tahminleri ile Chebyshev Polinomları konuları incelenmiş ve örnekler sunulmuştur.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümleri

$x_0, x_1, \dots, x_n$ n tane bilinmeyen olmak üzere,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i=1,2, \dots, n \quad (2.1.1)$$

olacak şekilde n tane lineer denklemden oluşan lineer denklem sistemini gözönüne alalım.

Teorem 2.1.1 (Cramer Kuralı) : Eğer $|A| = |a_{ij}| \neq 0$ ise (2.1.1) sistemi

$$x_r = \frac{\sum_{i=1}^n A_{ir}^* b_i}{|A|} \quad r = 1,2, \dots, n \quad (2.1.2)$$

ile verilen tek bir çözüme sahiptir.

Teorem 2.1.2 (Alternatif Teorem) : Eğer Teorem (2.1.1) 'de $b_i=0$ ($i=1,2,\dots,n$) ise elde edilen

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.1.3)$$

sistemine **homojen denklem sistemi** denir.

Bu sistemin trivial olmayan bir çözüme sahip olması için ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 'dan başka bir çözüme sahip olması için) $\Leftrightarrow |A| = 0$ olmasıdır.

Eğer belirli bir $A = (a_{ij})$ matrisi ve b_i 'lerin her seçimi için homojen olmayan (2.1.1) sisteminin çözümleri varsa o zaman $|A| \neq 0$ ve homojen denklem sistemi trivial çözüme sahiptir.

Tanım 2.1.1 : X bir F cismi üzerine bir vektör uzayı olsun.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n ; \quad \alpha_i \in F, \quad x_i \in X$$

toplamı x_i 'lerin bir **lineer kombinasyonu** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2 : $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vektörleri verilsin. Eğer

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad (*)$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sabitleri bulunabilirse o zaman $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerinin sonlu kümesi **lineer bağımlıdır** denir.

Buna karşılık (*) eşitliği ancak ve ancak

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

için sağlanıyorsa o zaman $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörleri **lineer bağımsızdır** denir.

Tanım 2.1.3 : $n \geq 0$ ve X bir vektör uzayı olsun. X 'deki her $n+1$ vektör lineer bağımlı ve X 'de lineer bağımsız n tane vektör bulunabiliyorsa X 'e **n boyutlu vektör uzayı** denir. Eğer böyle bir sonlu n sayısı bulunamıyorsa X 'e **sonsuz boyutlu** denir.

Tanım 2.1.4 : Her $x \in X$ vektörü x_i 'lerin tek türlü lineer kombinasyonu olarak yazılabiliyorsa $x_1, x_2, \dots$ elemanlarının kümesi X 'in bir **bazıdır** denir.

Teorem 2.1.3 : X vektör uzayının sonlu boyutlu olması için $\Leftrightarrow$ bir $n \geq 0$ için n elemanlı bir baza sahip olmasıdır.

Örnek 2.1.1 (R_n Uzayı) : $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gerçel sayı n -lilerinin oluşturduğu n boyutlu vektör uzayına **gerçel n -boyutlu Kartezyen uzay** denir ve R_n ile gösterilir.

Bu uzayda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ n -lisini göz önüne alalım. Vektör toplamı ve skalerle çarpma,

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

şeklindedir.

Bu uzayda $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ vektörleri birim vektörlerdir ve lineer bağımsızdır. Bu vektörlerin oluşturduğu baza **standart baz** denir.

Örnek 2.1.2 (C_n Uzayı) : $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ kompleks sayı n -lilerinin oluşturduğu n boyutlu vektör uzayına **kompleks n -boyutlu Kartezyen uzay** denir ve C_n ile gösterilir. Vektör toplamı, skalerle çarpma ve birim vektör Örnek 2.1.1 'deki gibidir.

Örnek 2.1.3 (T Fonksiyonlar Uzayı) : $S \subset R$ olmak üzere tanım kümeleri bu S kümesi olan bütün gerçel değerli fonksiyonların oluşturduğu uzay T ile gösterilir.

Bu uzayda $f, g \in T$ için toplama ve skalerle çarpma aşağıda olduğu gibi tanımlanır.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in S \quad (2.1.4)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in S \quad (2.1.5)$$

Bu uzayda 0 vektörü $0(x) = 0$ olan sıfır sabit fonksiyonudur. Ayrıca $-f$ fonksiyonu ,

$$(-f)(x) = -f(x), \quad x \in S \quad (2.1.6)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu gösterir. Bu tanımlarla T bir lineer vektör uzayıdır. Eğer S sonlu sayıda noktadan daha çoğunu içeriyorsa T sonsuz boyutludur.

2.2 Türevlenebilir (Diferansiyellenebilir) Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1 : $f(x)$, I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (2.2.1)$$

limiti mevcutsa $f(x)$ 'e bir $x_0 \in I$ noktasında **türevlenebilir (diferansiyellenebilir)** denir.

Eğer x_0 , I 'nın uç noktasıysa o zaman (2.2.1) 'deki limit uygun olan tek yanlı limitle ifade edilir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^+), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^-)$$

Eğer $f(x)$, I 'nın her noktasında türevlenebilirse o zaman $f(x)$ türevlenebilirdir.

Örnek 2.2.1 : $A(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ verilsin.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{A(x) - A(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{A(x) - A(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1) = -1$$

dir. $1 \neq -1$ olduğundan $A(x)$ fonksiyonu $x = 0$ da türeve sahip değildir. Diğer her noktada türevlidir.

Eğer f , I nın her noktasında türevlenebiliyorsa $f'(x)$ türevi çeşitli özelliklere sahiptir. Örneğin $[a, b]$ üzerinde $f'(x)$ türevinin I üzerinde sürekli olması önemli bir özelliktir.

$[a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi $C[a, b]$ ile gösterilir. Buna karşılık $[a, b]$ üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonların kümesi ise $C^1[a, b]$ ile gösterilir.

Bir f fonksiyonu verildiğinde eğer $f'(x)$ türevi sürekli ise $f(x) \in C^1[a, b]$ dir. Başka bir ifade ile ;

$$f(x) \in C^1[a, b] \Leftrightarrow f'(x) [a, b] \text{ aralığında sürekli dir.}$$

Tanım 2.2.2: Eğer $f(x)$, $[a, b]$ üzerinde n defa türevlenebilirse ve $f^{(n)}(x)$ $[a, b]$ üzerinde sürekli ise $f(x) \in C^n[a, b]$ dir. Yani ;

$$f(x) \in C^n[a, b] \Leftrightarrow f^{(n)}(x) \text{ sürekli dir.}$$

Tanım 2.2.3: Eğer $f(x) \in C^n[a, b]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ($C^0[a, b] = C[a, b]$ dir.) Yani n sonlu değilse o zaman f , $[a, b]$ üzerinde sonsuz türevlenebilir denir.

Bu uzay $C^\infty[a, b]$ ile gösterilir.

$f(x) \in C^\infty[a, b] \Leftrightarrow f$, sonsuz türevlenebilir. Örneğin $f(x) = x^2, -\infty < x < \infty$ fonksiyonu sonsuz türevlenebilir. Gerçekten ;

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2, \quad f'''(x) = 0, \quad f^{iv}(x) = f^v(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = 0$$

dır.

Teorem 2.2.1(Genelleştirilmiş Rolle Teoremi): $n \geq 2$ olsun. $f \in C[a, b]$ ve $f^{(n-1)}(x)$ fonksiyonları (a, b) 'nin her noktasında var olsun.

$a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ için $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0$ olsun. O zaman $f^{(n-1)}(\xi) = 0$ olacak şekilde $x_1 < \xi < x_n$ koşuluna uygun bir ξ noktası vardır.

Teorem 2.2.2 : $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ ve $x_0 \in [a, b]$ olsun. O zaman her $a \leq x \leq b$ için

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$$

dir.

2.3 Polinomlar

$$\textbf{Tanım 2.3.1 : } p_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad a_0 \neq 0 \quad n \geq 0 \quad (2.3.1)$$

ifadesi n -inci dereceden bir polinom belirtir. Derecesi $\leq n$ olan polinomlar $\mathcal{P}_n$ ile gösterilir. Polinomların katsayılarının gerçel ya da kompleks olmasına göre ayırt edilir. $\mathcal{P}_n$ bir lineer uzaydır.

Teorem 2.3.1 (Cebirin Temel Teoremi): Derecesi $n \geq 1$ olan n -inci dereceden bir polinom bir kompleks köke sahiptir.

Teorem 2.3.2 (Çarpanlara Ayırma Teoremi): Eğer $p_n(z)$ n -inci dereceden bir polinomsa

$$p_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \equiv a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad (a_0 \neq 0)$$

olacak şekilde n tane $z_1, z_2, \dots, z_n$ kompleks sayısı bulunabilir.

z_i değerleri farklı olmayabilir. Eğer n kompleks sayıdan r tanesi ($r \leq n$) $z_1, z_2, \dots, z_r$ farklı ise $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = n$ şartını sağlayan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ pozitif tamsayılarını kullanarak

$$p_n(z) = a_0 (z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_r)^{\alpha_r} \quad (2.3.2)$$

yazılabilir.

α_i tek olarak belirlenir ve bu α_i 'ler z_i 'lerin kaç katlı olduğunu gösterir.

$$p_n(z_i) = p_n'(z_i) = \dots = p_n^{(\alpha_i-1)}(z_i) = 0 \quad p_n^{(\alpha_i)} \neq 0 \quad (2.3.3)$$

dır. Karşıt olarak bu türev koşulu (2.3.2) 'yi gerekli kılar.

Teorem 2.3.3(Teklik) : Eğer $f(z) \in \wp_n$ ve f polinomu n farklı noktadan daha çok noktada sıfır oluyorsa bu polinom özdeş olarak sıfırdır.

İspat: f 'nin derecesi k ve $k \leq n$ olsun. Teorem 2.3.2 'den

$$f(z) = a_0(z - z_1) \dots (z - z_k)$$

dır. Hipotezden $f(z^*) = 0$ olacak şekilde $z^* \neq z_1, z_2, \dots, z_k$ bulunabilir. O zaman

$$0 = a_0(z^* - z_1) \dots (z^* - z_k) \text{ öyle ki } a_0 = 0 \text{ dır. Böylece } f(z) \equiv 0 \text{ 'dır.}$$

2.4 Lineer Fonksiyoneller ve Cebirsel Dual (Eşlenik) Uzaylar

Tanım 2.4.1 : X bir lineer vektör uzayı olsun. Bu uzayda kompleks ya da gerçel sayılarla tanımlı bir fonksiyon L olsun. Her $x \in X$ için $L(x)$ tek olarak belirlidir. Eğer her $x, y \in X$ ve her gerçel (veya kompleks) α, β için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

ise o zaman L 'ye X üzerinde bir lineer fonksiyonel denir.

Örnek 2.4.1 : $X = C[a, b]$ olsun. X 'in elemanları $f(x)$ fonksiyonlarıdır.

$$L(f) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{veya} \quad L(f) = \int_a^b x^2 f(x) dx$$

birer lineer fonksiyoneldir.

Örnek 2.4.2 : $X = R_n$ olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $a_1, \dots, a_n$ sabit sayılar olsunlar.

$$L(x) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

bir lineer fonksiyoneldir.

Tanım 2.4.2 : X bir lineer uzay ve L_1 ve L_2 , X üzerinde tanımlı iki lineer fonksiyonel olsun. L_1 ve L_2 'nin toplamı ve α ile L_1 'in skaler çarpımı ,

$$\begin{aligned}
(a) (L_1 + L_2)(x) &= L_1(x) + L_2(x), \quad x \in X \\
(b) (\alpha L_1)(x) &= \alpha L_1(x)
\end{aligned}
\tag{2.4.2}$$

şeklinde gösterilir. (a) ve (b) özellikleriyle tüm lineer fonksiyonellerin uzayı da bir lineer uzaydır.

Tanım 2.4.3 : X bir lineer uzay olsun. X üzerinde (a) ve (b) kurallarının tanımlı olduğu lineer fonksiyonellerin kümesi bir lineer uzay oluşturur ve bu uzay X^* ile gösterilir. X^* 'a X 'in **cebirsal dual (eşleniği) uzayı** denir.

Örnek 2.4.3: $X = C[a, b]$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ aralığındaki n farklı nokta ve $f \in X$ için $L_k(f) = f(x_k)$ olsun. O zaman X^* 'da $L_1, L_2, \dots, L_n$ 'ler lineer bağımsızdır. Aksi takdirde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, \dots, a_n$ sabitleri için $a_1 L_1 + a_2 L_2 + \dots + a_n L_n = 0$ dır. Böylece her $f \in C[a, b]$ için

$$(a_1 L_1 + a_2 L_2 + \dots + a_n L_n)(f) = 0(f)$$

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n) = 0$$

dır. Bu imkansızdır. Eğer $a_k \neq 0$ ise $f(x_k) = 1$, $f(x_i) = 0$, $i \neq k$

Buradan $a_k = 0$ çelişkisine varılır.

Teorem 2.4.1 : Eğer X n boyutlu ise X^* da n boyutludur.

İspat: $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ için bir baz olsun. O zaman herhangi $x \in X$ için

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

tek türlü yazılır. Bu yüzden

$$L(x) = a_1 L(x_1) + \dots + a_n L(x_n)$$

dir. Herhangi $x \in X$ kümesi için

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= a_1 \\
L_2(x) &= a_2 \\
&\vdots \\
L_n(x) &= a_n
\end{aligned}
\tag{2.4.3}$$

olarak tanımlayalım. L_i ' ler X üzerinde tanımlı lineer fonksiyonlardır ve lineer bağımsızdırlar.

$$\beta_1 L_1 + \beta_2 L_2 + \dots + \beta_n L_n = 0$$

olsun. O zaman

$$\beta_1 L_1(x_j) + \beta_2 L_2(x_j) + \dots + \beta_j L_j(x_j) + \dots + \beta_n L_n(x_j) = 0(x_j) = 0$$

dır. Fakat $L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ dir. Çünkü $L_j(x_j) = 1$ olur ve

$$\beta_j L_j(x_j) = \beta_j 1 = \beta_j \Rightarrow 0 + 0 + \dots + \beta_j 1 + 0 + \dots + 0 = 0 \Rightarrow \beta_j = 0$$

dır. Böylece $L_1, L_2, \dots, L_n$ 'ler lineer bağımsızdırlar.

Böylece X^* uzayı en azından n boyutludur denir. Şimdi biz bunun en çok n boyutlu olduğunu gösterelim.

$n+1$ fonksiyonel düşünelim. Bunlar $L_1, L_2, \dots, L_{n+1}$ olsun.

$$[L_i(x_1), L_i(x_2), \dots, L_i(x_n)] \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

biçimindeki $n+1$ tane n -lileri göz önüne alalım.

R_n (veya C_n) n boyutlu olduğundan bu n -liler lineer bağımsız olamaz.

Böylece

$$\alpha_1 [L_1(x_1), \dots, L_1(x_n)] + \alpha_2 [L_2(x_1), \dots, L_2(x_n)] + \dots + \alpha_{n+1} [L_{n+1}(x_1), \dots, L_{n+1}(x_n)] = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ sayıları bulunabilir.

Bundan dolayı

$$(\alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_{n+1} L_{n+1})(x_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

için bu lineer kombinasyonlar ayrı ayrı $x_1, x_2, \dots, x_n$ için yazılır ve alt alta toplanırsa ve lineerlik özelliği de kullanılarak düzenleme sonucu

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

olduğundan $(\alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_{n+1} L_{n+1})(x) = 0 \quad x \in X$ 'dir.

Bu yüzden $L_1, \dots, L_{n+1}$ lineer bağımlı olur ve X^* 'ın boyutu en fazla n olur.

Böylece X^* n boyutlu bir uzaydır.

3. İNTERPOLASYON

3.1. Polinomlarla İnterpolasyon

Teorem 3.1.1: $n + 1$ tane $z_0, z_1, \dots, z_n$ (gerçek veya kompleks) farklı noktaları ve $n + 1$ tane $w_0, w_1, \dots, w_n$ (gerçek veya kompleks) değerleri verilsin. $\wp_n$ n -inci dereceden polinomlar kümesini gösterebilir.

$$p_n(z_i) = w_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.1.1)$$

olacak şekilde bir tek $p_n(z) \in \wp_n$ polinomu vardır.

İspat : $n + 1$ tane $a_0, a_1, \dots, a_n$ katsayılı

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

polinomunu göz önüne alalım.

(3.1.1) 'in koşullarını sağlayan $n + 1$ tane a_i bilinmeyenlerini içeren ve $n + 1$ tane lineer denklemden oluşan ve kısaca

$$a_0 + a_1 z_i + \dots + a_n z_i^n = w_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.1.2)$$

şeklinde gösterilen lineer denklem sistemi verilsin. Bu sistemin açık şekli;

$$a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_n z_0^n = w_0$$

$$a_0 + a_1 z_1 + \dots + a_n z_1^n = w_1$$

$$\vdots$$

$$a_0 + a_1 z_n + \dots + a_n z_n^n = w_n$$

dir.

Bu sistemin katsayılar determinanı $z_0, z_1, \dots, z_n$ 'den oluşan ve $V(z_0, z_1, \dots, z_n)$ şeklinde gösterilen **Vandermonde determinantıdır**. O halde

$$V(z_0, z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^n \end{vmatrix} \quad (3.1.3)$$

dir.

V 'nin değerini bulmak için aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım.

$$V(z) = V(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \cdots & z_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-1}^n \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix} \quad (3.1.4)$$

$V(z) \in \wp_n$ 'dir. Çünkü (3.1.4) determinantını son satıra göre açarsak:

$$V(z) = (-1)^{n+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} z_0 & \cdots & z_0^n \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n-1} & \cdots & z_{n-1}^n \end{vmatrix} + (-1)^{n+3} \cdot z \cdot \begin{vmatrix} 1 & z_0^2 & \cdots & z_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & z_{n-1}^2 & \cdots & z_{n-1}^n \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{2n+2} \cdot z^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \cdots & z_0^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

olduğundan determinantlar bir sayı olacaktır ve sağ taraf z 'ye göre n -inci dereceden $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ şeklinde bir polinom olur. Öte yandan $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ sayıları için bu fonksiyon sıfır olur. Yani bu sayılar $V(z)$ 'nin kökleridir. Gerçekten (3.1.4) determinantının iki satırı aynı olduğundan determinantın değeri 0 olur. Böylece

$$V(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z) = A(z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1}) \quad (3.1.5)$$

yazılır ve burada A yalnızca $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ sayılarına bağlıdır. A 'nın değerini belirlemek için (3.1.4) 'teki determinanti son satırın minörüne göre açarsak z^n 'in katsayısının $V(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ olduğunu görürüz.

$$V(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z) = V(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})(z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1}) \quad (3.1.6)$$

dir. z yerine z_n alırsak:

$$V(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) = V(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})(z_n - z_0)(z_n - z_1) \dots (z_n - z_{n-1}) \quad (3.1.7)$$

dir. $n = 1$ için $i = 0, 1$

$$V(z_0, z_1) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \end{vmatrix} = z_1 - z_0$$

dır.

$n = 2$ için $i = 0, 1, 2$ (3.1.7) 'den

$$\begin{aligned} V(z_0, z_1, z_2) &= V(z_0, z_1)(z_2 - z_0)(z_2 - z_1) \begin{pmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 \\ 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \end{pmatrix} \\ &= (z_1 - z_0)(z_2 - z_0)(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

$$= \prod_{i>j}^2 (z_i - z_j) \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ j = 0, 1 \end{pmatrix}$$

dir.

$n = n$ için (3.1.7) 'den

$$V(z_0, \dots, z_{n-1}, z_n) = \prod_{i>j}^n (z_i - z_j) \quad \begin{pmatrix} i = 1, \dots, n \\ j = 0, \dots, n-1 \end{pmatrix} \quad (3.1.8)$$

dir.

$n = k$ için aşağıdakini doğru kabul edelim.

$$V(z_0, \dots, z_{k-1}, z_k) = \prod_{i>j}^k (z_i - z_j)$$

$n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} V(z_0, \dots, z_k, z_{k+1}) &= V(z_0, \dots, z_{k-1}, z_k)(z_{k+1} - z_0) \dots (z_{k+1} - z_k) \\ &= \prod_{i>j}^k (z_i - z_j)(z_{k+1} - z_0) \dots (z_{k+1} - z_k) \\ &= \prod_{i>j}^{k+1} (z_i - z_j) \end{aligned}$$

bulunur.

Hipotezden $z_0, z_1, \dots, z_n$ $n + 1$ tane farklı nokta olduklarından $V \neq 0$ 'dır. (Determinantın bütün satırları birbirinden farklı olduklarından $V \neq 0$ 'dır.) Böylece katsayılar determinantı 0 'dan farklı olan (3.1.2) sistemi tek çözüme sahiptir.

3.2. Sonlu İnterpolasyonun Genel Problemi

Teorem 3.1.1 'de $n + 1$ değeri esas alarak $\wp_n$ 'in elemanı olan bir polinomu yeniden kurduk. $n+1$ değerle lineerliği nasıl bağdaştırabiliriz. Bunu polinomlar dışında fonksiyonlar için de yapabilir miyiz? Bu sorular bizi aşağıdaki genel probleme götürür.

X , n boyutlu bir vektör uzay ve $L_1, L_2, \dots, L_n$ X üzerinde tanımlı n tane lineer fonksiyonel olsun. $w_1, w_2, \dots, w_n$ değerler kümesi için,

$$L_i(x) = w_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.1)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ bulabilir miyiz? L_i, X^* 'da lineer bağımsızsa cevap evettir.

Yardımcı Teoremi 3.2.1: X n boyutlu bir vektör uzay olsun. Eğer $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'ler X 'de lineer bağımsızsa ve $L_1, L_2, \dots, L_n$ ' ler X^* 'da lineer bağımsızsa o zaman

$$|L_i(x_j)| \neq 0 \quad (3.2.2)$$

dır.

Karşıt olarak eğer $x_1, x_2, \dots, x_n$ veya $L_1, L_2, \dots, L_n$ gruplarından biri lineer bağımsız ve (3.2.2) sağlanıyorsa diğer grup da lineer bağımsızdır.

Teorem 3.2.2 : X n boyutlu bir vektör uzayı olsun ve $L_1, L_2, \dots, L_n$ X^* 'ın n tane elemanı olsun. (3.2.1) interpolasyon polinomunun keyfi $w_1, w_2, \dots, w_n$ değerlerine karşılık bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $L_i, i = 1, 2, \dots, n$ fonksiyonellerinin X^* içinde lineer bağımsız olmasıdır. Çözüm tektir.

İspat ($\Leftarrow$): Eğer $L_1, L_2, \dots, L_n$ ' ler X^* 'da lineer bağımsızsa ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ ' ler X 'de lineer bağımsızsa o zaman Yardımcı Teorem 3.2.1 'den $|L_i(x_j)| \neq 0$ dır. Böylece

$$L_i(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = w_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

veya

$$a_1L_i(x_1) + a_2L_i(x_2) + \dots + a_nL_i(x_n) = w_i \quad (3.2.3)$$

sistemi $a_1, \dots, a_n$ çözümüne sahiptir. Ve $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ elemanı interpolasyon probleminin çözümüdür.

($\Rightarrow$): Eğer (3.2.1) problemi keyfi w_i ' ler için bir çözüme sahipse, o zaman (3.2.3) sistemi keyfi w_i ' ler için bir çözüme sahiptir. Teorem 2.1.2 $|L_i(x_j)| \neq 0$ olduğunu gösterir ve Yardımcı Teorem 3.2.1 'den L_i 'ler lineer bağımsızdır.

$|L_i(x_j)|$ determinanı genelleştirilmiş Gram determinantıdır. Bunun sıfır olmayışı ile interpolasyon probleminin çözümünün olması eşdeğerdir. Fonksiyonellerin lineer bağımsızlık özelliğini interpolasyon özelliği olarak

söyleyebiliriz.

Örnek 3.2.1: X , $[-1,1]$ aralığında tanımlı $a_0 + a_2x^2$ formundaki fonksiyonların kümesini gösterebiliriz. X 'in boyutu 2 'dir. Çünkü bu uzay 1 ve x^2 fonksiyonlarının lineer kombinasyonlarının kümesidir. Eğer $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$ için $L_1(f) = f(x_1)$ ve $L_2(f) = f(x_2)$ ise lineer bağımsız 1 ve x^2 elemanları için genelleştirilmiş gram determinanı

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 \\ 1 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

dir.

3.3. İnterpolasyon Özelliğine Sahip Olan Sistemler

Örnek 3.3.1 (Farklı Noktalarda İnterpolasyon) :

$$X = \wp_n, \quad L_0(f) = f(z_0), \quad L_1(f) = f(z_1), \quad \dots, \quad L_n(f) = f(z_n)$$

Burada $z_i \neq z_j$, $(i \neq j \text{ için})$ dir. Ek olarak;

Taylor interpolasyonu:

$$X = \wp_n, \quad L_0(f) = f(z_0), \quad L_1(f) = f'(z_0), \quad \dots, \quad L_n(f) = f^{(n)}(z_0)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu örnek Teorem 3.1.1 ile aynıdır. Çünkü Teorem 3.1.1 “ $z_0, z_1, \dots, z_n$ gibi $n+1$ tane farklı nokta ve $w_0, w_1, \dots, w_n$ değerleri için

$$p_n(z_i) = w_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.1.1)$$

olacak şekilde bir tek $p_n(z) \in \wp_n$ polinomu vardır” ifadesine sahiptir. Öte yandan X n boyutlu bir vektör uzayı ve $L_1, L_2, \dots, L_n$ X üzerinde n tane lineer fonksiyonel ve $w_1, w_2, \dots, w_n$ değerleri olmak üzere eğer L_i 'ler lineer bağımsız ise

$$L_i(x) = w_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.1)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ vardır.

Önce x ile f aynıdır. Öte yandan Örnek (3.3.1) 'de fonksiyoneller $L_0, L_1, \dots, L_n$ olmak üzere $n+1$ tanedir. $X = \wp_n$ uzayını aldığımızdan ilk anlatımda

x ve f , $\wp_n = X$ 'in elemanını ifade ederler. Böylece

$$\begin{aligned} f(z) &= p_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \\ f(z_i) &= p_n(z_i) = a_0 + a_1z_i + a_2z_i^2 + \dots + a_nz_i^n = w_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.1.2) \\ L_i(f) &= f(z_i) = p_n(z_i) = a_0 + a_1z_i + a_2z_i^2 + \dots + a_nz_i^n = w_i \\ L_0(f) &= f(z_0) = p_n(z_0) = w_0 \\ L_1(f) &= f(z_1) = p_n(z_1) = w_1 \\ &\vdots \\ L_n(f) &= f(z_n) = p_n(z_n) = w_n \end{aligned}$$

dir.

Örnek 3.3.2 (Hermite İnterpolasyonu) :

$X = \wp_N$, indekslemedeki zorlukları önlemek için, fonksiyonel bilgiyi L sembolünü kullanmadan listeledik.

Eğer $p \in \wp_N$ ise, ve

$$\begin{aligned} p(z_0) &= 0, \quad p'(z_0) = 0, \quad \dots, \quad p^{m_0}(z_0) = 0 \\ p(z_1) &= 0, \quad p'(z_1) = 0, \quad \dots, \quad p^{m_1}(z_1) = 0 \\ &\vdots \\ p(z_n) &= 0, \quad p'(z_n) = 0, \quad \dots, \quad p^{m_n}(z_n) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

şartları sağlanırsa ve $N = m_0 + m_1 + \dots + m_n + n$ olmak üzere $p \equiv 0$ olduğunu göstereceğiz. Çarpanlara ayırma teoreminden p , (3.3.1) 'in sonucusu dışında yani $p^{m_n}(z_n) = 0$ dışında diğerlerini sağlarsa

$$p(z) = A(z)(z - z_0)^{m_0+1}(z - z_1)^{m_1+1} \dots (z - z_{n-1})^{m_{n-1}+1}(z - z_n)^{m_n} \quad (*)$$

dir.

(*) 'daki $p(z)$ ' nin derecesini incelersek;

$$\begin{aligned} \deg[p(z)] &= m_0 + 1 + m_1 + 1 + \dots + m_{n-1} + 1 + m_n \\ &= m_0 + m_1 + \dots + m_n + n = N \end{aligned}$$

dir. O halde $A = A(z)$ sabittir.

$p(z)$ polinomu için m_n -inci mertebeden türev alındığında ve bu türevde z yerine z_n konulduğunda (3.3.1) 'in son koşulundan dolayı sonuçta

$$p^{(m_n)}(z_n) = A(m_n)!(z_n - z_0)^{m_0+1} \dots (z_n - z_{n-1})^{m_{n-1}+1} = 0$$

olur ve ayrıca $z_i \neq z_j$ olduğundan burada $A = 0$ bulunur. Dolayısıyla $p \equiv 0$ bulunur.

Homojen interpolasyon problemi yani $p(z_i) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$ yalnızca 0 çözümüne sahiptir. Yani katsayılar determinanı 0 'dan farklıdır. Teorem (3.2.1) 'deki gibi homojen olmayan denklemin de tek çözümü vardır.

Örnek 3.3.3 (Trigonometrik İnterpolasyon) :

$1, \cos x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$ 'in lineer kombinasyonu derecesi n 'den küçük olan **trigonometrik polinom** olarak bilinir.

Karşılık gelen lineer uzay τ_n ile gösterilir. Boyutu $2n+1$ 'dir. Bu kombinasyon $\tau_n(x)$ ile gösterilirse ,

$$\tau_n(x) = A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \dots + A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

ile yazılır. $T_n \in \tau_n$ dir.

$$X = \tau_n \quad L_0(f) = f(x_0), \quad L_1(f) = f(x_1), \dots, L_{2n}(f) = f(x_{2n})$$

$$-\pi \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < \pi$$

dir.

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \dots, f_{2n-1}(x) = \cos nx, \quad f_{2n}(x) = \sin nx$$

Sistemin determinanı:

$$G = \begin{vmatrix} L_0(f_0) & L_0(f_1) & \dots & L_0(f_{2n}) \\ L_1(f_0) & L_1(f_1) & \dots & L_1(f_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{2n}(f_0) & L_{2n}(f_1) & \dots & L_{2n}(f_{2n}) \end{vmatrix}$$

dir.

$$L_0(f_0) = 1$$

$$L_1(f_0) = f_0(x_1) = 1$$

$$\vdots$$

$$L_{2n}(f_0) = f_0(x_{2n}) = 1$$

$$\begin{aligned}
L_0(f_1) &= f_1(x_0) = \cos x_0 \\
L_1(f_1) &= f_1(x_1) = \cos x_1 \\
&\vdots \\
L_{2n}(f_1) &= f_1(x_{2n}) = \cos x_{2n}
\end{aligned}$$

dir. Bu şekilde diğer sütunlar bulunur.

$$G = \begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cos 2x_0 & \sin 2x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cos 2x_1 & \sin 2x_1 & \cdots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cos 2x_{2n} & \sin 2x_{2n} & \cdots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix} \quad (3.3.2)$$

G 'yi hesaplamak için elemanları kompleks forma dönüştürelim. 3. ve 5. ... (tek sütunları) i ile çarpıp sırasıyla 2. ve 4. ... (çift sütunlara) sütunlara ekleyelim. Bu durumda

$$G = \begin{vmatrix} 1 & e^{ix_j} & \sin x_j & e^{2ix_j} & \sin 2x_j & \cdots & e^{nix_j} & \sin nx_j \end{vmatrix} \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2n$$

elde edilir.

3. ve 5. ... sütunları $-2i$ ile çarpıp onlara 2. ve 4. ... sütunlar eklenirse,

$$(-2i)^n . G = \begin{vmatrix} 1 & e^{ix_j} & e^{-ix_j} & e^{2ix_j} & e^{-2ix_j} & \cdots & e^{nix_j} & e^{-nix_j} \end{vmatrix} \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2n$$

elde edilir.

Böylece kalanlar kendi arasında yer değiştirirse;

$$(-1)^{n(n+1)} . (-2i)^n . G = \begin{vmatrix} e^{-nix_j} & e^{-(n-1)ix_j} & \cdots & 1 & \cdots & e^{(n-1)ix_j} & e^{nix_j} \end{vmatrix}$$

olur. Şimdi j. satırı e^{nix_j} ile çarparsak $j = 0, 1, \dots, 2n$

$$e^{ni(x_0+x_1+\dots+x_{2n})} . (-1)^{n(n+1)} . (-2i)^n . G = \begin{vmatrix} 1 & e^{ix_j} & e^{2ix_j} & \cdots & e^{2nix_j} \end{vmatrix}$$

olur. Son determinant Vandermonde determinantıdır. (3.1.8) 'den

$$e^{ni(x_0+x_1+\dots+x_{2n})} . (-1)^{n(n+1)} . (-2i)^n . G = \prod_{j>k}^{2n} (e^{ix_j} - e^{ix_k})$$

bulunur. x_j üzerindeki koşullardan dolayı $e^{ix_j} \neq e^{ix_k}$ ve o halde $G \neq 0$ 'dır.

Trigonometrik İnterpolasyonun Özel Hali :

$$X = \tau_n, \quad L_{2k}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$L_{2k-1}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, \dots, n$$

dir.

3.4. Çözümün Tekliği

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonları bir I aralığında tanımlı olsun.
 $x_1, \dots, x_n \in I$ ve $w_1, w_2, \dots, w_n$ n farklı değer olsun.

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i(x_j) = w_j \quad j=1, 2, \dots, n \quad (3.4.1)$$

interpolasyon probleminin tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$|f_i(x_j)| \neq 0 \quad (3.4.2)$$

olmasıdır.

Tanım 3.4.1 : Bir S kümesi üzerinde tanımlı n tane fonksiyondan oluşan $f_1, f_2, \dots, f_n$ sistemi verilsin. Eğer (3.4.2), S 'den seçilen her n farklı nokta için sağlanırsa, o zaman bu fonksiyon sistemine S üzerinde **tek çözüm** denir.

Noktasal interpolasyonda çözümün tekliği tek çözüm sistemiyle ortaya konulabilir.

$f_1, f_2, \dots, f_n$ sisteminin S üzerinde tek çözüm olması için gerek ve yeter koşul $f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ 'lerin lineer kombinasyonunun S 'nin farklı n noktası için özdeş olarak sıfır olmasıdır.

Örnek 3.4.1 : $1, x^2$ sistemi $[0,1]$ üzerinde tek çözümdür. Fakat $[-1,1]$ üzerinde tek çözüm değildir.

Çözüm : $f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x^2$ verilsin.

$x_1, x_2 \in [0,1] = I$ ve farklı iki nokta yani $x_1 \neq x_2$ için (3.4.1) ifadesi

$$\sum_{i=1}^2 a_i f_i(x_j) = w_j \quad j = 1, 2$$

şeklinde olur. Bunu açık yazalım.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 f_1(x_1) + a_2 f_2(x_1) = w_1 \\ a_1 f_1(x_2) + a_2 f_2(x_2) = w_2 \end{array} \right\} \quad (*)$$

(*) sisteminin tek çözüme sahip olması için katsayılar determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. Yani

$$|f_i(x_j)| = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

olmasıdır.

$x_1 \neq x_2$ ve $x_1, x_2 \in [0, 1]$ için

$$\Delta = |f_i(x_j)| = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 \\ 1 & x_2^2 \end{vmatrix} = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \neq 0$$

dır. Böylece $[0, 1]$ aralığı için $x_1 \neq x_2$ iken $\Delta \neq 0$ dır. Fakat eğer $I = [-1, 1]$ alınırsa bu mümkün olmaz çünkü, x_1 ve $x_2 = -x_1$ alalım. $x_1 \neq x_2$ dir. Fakat $x_2^2 = x_1^2$ ' dir. O halde $\Delta = 0$ olur. Böylece $[-1, 1]$ aralığında bu fonksiyon sistemi tek çözüm olamaz.

Örnek 3.4.2: $1, x, x^2, \dots, x^n$ sistemi herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tek çözümdür.

Çözüm : $f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2, \dots, f_{n+1}(x) = x^n$ verilsin.

Farklı $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ noktaları Teorem (3.1.1) 'den

$$\Delta = |f_i(x_j)| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \neq 0$$

olup, $1, x, x^2, \dots, x^n$ sistemi tek çözümdür.

3.5. Lagrange İnterpolasyon Formülü

$z_0, z_1, \dots, z_n$ farklı noktalar olsun ve n . dereceden

$$l_k(z) = \frac{(z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\dots(z-z_n)}{(z_k-z_0)(z_k-z_1)\dots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\dots(z_k-z_n)} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.5.1)$$

polinomlarını göz önüne alalım ve burada

$$l_k(z_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{eğer } k \neq j \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } k = j \text{ ise} \end{cases} \quad (3.5.2)$$

dir.

$w_0, w_1, \dots, w_n$ değerleri için

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n w_k l_k(z) \quad (3.5.3)$$

polinomu $\mathcal{P}_n$ 'dedir. $p_n(z)$ 'nin açık şekli:

$$p_n(z_k) = w_0 l_0(z_k) + w_1 l_1(z_k) + \dots + w_k l_k(z_k) + \dots + w_n l_n(z_k)$$

olduğundan

$$p_n(z_k) = w_k \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.5.4)$$

dir.

(3.5.3) formülü **Lagrange İnterpolasyon Formülü** olarak adlandırılır.

(3.5.4) interpolasyon problemi tek bir çözüme sahiptir.

Bir alterne form yararlı olacaktır.

$$w(z) = (z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\dots(z-z_n) \quad (3.5.5)$$

O zaman

$$w'(z_k) = (z_k-z_0)(z_k-z_1)\dots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\dots(z_k-z_n) \quad (3.5.6)$$

dır. Böylece (3.5.1) formülü :

$$l_k(z) = \frac{w(z)}{(z-z_k)w'(z_k)} \quad (3.5.7)$$

olur. (3.5.3) formülü :

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n w_k \frac{w(z)}{(z-z_k)w'(z_k)} \quad (3.5.8)$$

olur.

$l_k(z)$ polinomları noktasal interpolasyon için **temel polinom** olarak adlandırılır.

w_i sayıları, z_i noktalarında $f(z)$ fonksiyonunun aldığı değerlerdir, yani $w_i = f(z_i)$ 'dir. (3.5.8) ile verilen $p_n(z)$ polinomu $z_0, z_1, \dots, z_n$ noktalarında $f(z)$ fonksiyonunun aldığı w değerlerinden oluşur.

Eğer ,

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n f(z_k) l_k(z) = \sum_{k=0}^n f(z_k) \frac{w(z)}{(z - z_k) w'(z_k)} \quad (3.5.9)$$

ise

$$p_n(z_k) = f(z_k) \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.5.10)$$

dir. Burada (3.5.9) interpolasyon probleminin aldığı yeni şekil ve (3.5.10) da onun çözümüdür.

Tanım 3.5.1 : $z_0, z_1, \dots, z_n$ noktalarında f fonksiyonu ile çakışan yani (3.5.10)'u sağlayan $\wp_n$ sınıfının bir tek polinomunu $p_n(f; z)$ ile göstereceğiz.

Varsayalım ki $q(z) \in \wp_n$ olsun. O zaman q $n+1$ tane $q(z_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$ değeriyle tek olarak belirlenir. Böylece

$$p_n(q; z) \equiv q(z) \quad (3.5.11)$$

özdeşliğine sahip oluruz. Şimdi $q(z) = (z - u)^j$ alalım. $j = 0, 1, \dots, n$ ve u bağımsız bir değişken olsun. (3.5.9) ve (3.5.11) 'den

$$(z - u)^j = \sum_{k=0}^n (z_k - u)^j l_k(z) \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (3.5.12)$$

özdeşliğini elde ederiz.

(3.5.12) 'den $j = 0$ için ve $j = 1, \dots, n$ için $u = z$ seçilirse,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^n l_k(z) &\equiv 1 & j = 0 \\ \sum_{k=0}^n (z_k - z)^j l_k(z) &\equiv 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (3.5.13)$$

elde ederiz.

(3.5.13) 'deki $n+1$ tane özdeşlik $l_k(z)$ temel polinomları için **Cauchy bağıntıları** olarak adlandırılır.

Temel polinomların önemi (3.5.2) özdeşliğinde yatar ve interpolasyon probleminin (3.5.9) 'daki açık şekliye sonuçlanır.

Gerçekten;

$$\begin{aligned} p_n(z_j) &= \sum_{k=0}^n f(z_k)l_k(z_j) \\ &= f(z_0)l_0(z_j) + f(z_1)l_1(z_j) + \dots + f(z_n)l_n(z_j) \end{aligned} \quad (*)$$

dir. $j=k=0$ için;

$$p_n(z_0) = f(z_0) + 0 + 0 + \dots + 0$$

$j=k=1$ için;

$$p_n(z_1) = 0 + f(z_1) + 0 + 0 + \dots + 0$$

dır.

$$\begin{aligned} L_0(f) &= f(z_0), \quad L_1(f) = f(z_1), \dots, L_n(f) = f(z_n) \\ L_i(l_j) &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

olarak yazılabilir.

Bu durumda $l_i(z)$ polinomları ve L_i fonksiyonellerine **biortonormal** denir. Verilen lineer bağımsız fonksiyoneller kümesi için polinomların biortonormal kümesini daima bulabiliriz. Gerçekten aşağıdaki teoremden Lagrange formülünün genelleştirilmişine sahip oluruz.

Teorem 3.5.1: X , n boyutlu bir vektör uzayı olsun. $L_1, L_2, \dots, L_n$ X^* 'da n tane lineer bağımsız fonksiyonel olsun. O zaman X 'in n tane lineer bağımsız $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ elemanları

$$L_i(x_j^*) = \delta_{ij} \quad (3.5.15)$$

olacak şekilde tek olarak belirlenir.

Herhangi bir $x \in X$ için,

$$x = \sum_{i=1}^n L_i(x) x_i^* \quad (3.5.16)$$

dır.

$w_1, w_2, \dots, w_n$ 'lerin her seçimi için,

$$x = \sum_{i=1}^n w_i x_i^* \quad (3.5.17)$$

elemanı

$$L_i(x) = w_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.18)$$

interpolasyon probleminin tek çözümüdür.

İspat : $x_1, x_2, \dots, x_n$ X 'in bazı olsunlar. Yardımcı Teorem 3.2.1 'den $|L_i(x_j)| \neq 0$ 'dır. Eğer $x_j^* = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n$ $j = 1, 2, \dots, n$ ise determinant koşulu (3.5.15) sisteminden a_{ji} $j = 1, 2, \dots, n$ katsayılarının çözümünü $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ tek olarak belirlenecek şekilde garanti eder.

Gerçekten, x_j^* (3.5.15) 'de yerine yazılırsa;

$$L_i(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n) = \delta_{ij}$$

veya

$$\left. \begin{aligned} a_{j1}L_i(x_1) + \dots + a_{jn}L_i(x_n) &= \delta_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ i = 1 \text{ için } a_{j1}L_1(x_1) + a_{j2}L_1(x_2) + \dots + a_{jn}L_1(x_n) &= \delta_{1j} \\ i = 2 \text{ için } a_{j1}L_2(x_1) + a_{j2}L_2(x_2) + \dots + a_{jn}L_2(x_n) &= \delta_{2j} \\ \vdots \\ i = n \text{ için } a_{j1}L_n(x_1) + a_{j2}L_n(x_2) + \dots + a_{jn}L_n(x_n) &= \delta_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (*_1)$$

dir.

$j = 1$ için $x_1^* = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$ kombinasyonundaki $a_{11}, \dots, a_{1n}$ katsayıları

(*_1) sisteminde $j=1$ alınarak oluşturulan sistemin çözümü olarak belirlenir. Çünkü,

$$|L_i(x_j)| = \begin{vmatrix} L_1(x_1) & L_1(x_2) & \dots & L_1(x_n) \\ L_2(x_1) & L_2(x_2) & \dots & L_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n(x_1) & L_n(x_2) & \dots & L_n(x_n) \end{vmatrix}$$

dir. (*_1) 'den $a_{11}L_1(x_1) + a_{12}L_1(x_2) + \dots + a_{1n}L_1(x_n) = \delta_{11} = 1$

$$a_{11}L_2(x_1) + a_{12}L_2(x_2) + \dots + a_{1n}L_2(x_n) = \delta_{21} = 0$$

$\vdots$

$$a_{11}L_n(x_1) + a_{12}L_n(x_2) + \dots + a_{1n}L_n(x_n) = \delta_{n1} = 0$$

dir.

Bu sistemin bilinmeyenleri $a_{11}, \dots, a_{1n}$ olup katsayılar determinantı $|L_i(x_j)| \neq 0$ 'dır ve çözüm tek olup x_i^* 'ın katsayılarıdır ve x_i^* tek olarak belirlenir. Benzer şekilde yani (3.5.15) sağlanacak şekilde $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ sistemi tek olarak belirlenir.

Teorem 3.2.2 'den dolayı interpolasyon probleminin her j için çözümü tektir ve Yardımcı Teorem (3.2.1) 'den dolayı x_i^* 'ler lineer bağımsızdır.

(3.5.16) 'nın tekliği:

$$y = \sum_{i=1}^n L_i(x) x_i^*$$

olsun. O zaman

$$L_j(y) = \sum_{i=1}^n L_i(x) L_j(x_i^*) \quad (*)$$

olur. Böylece (3.5.15) 'ten $L_j(y) = L_j(x)$ $j= 1, 2, \dots, n$ bulunur. Çünkü $L_i(x_j^*) = \delta_{ij}$ olup i ve j yer değiştirirse,

$$L_j(x_i^*) = \delta_{ji}$$

olur. (*) 'dan

$$\begin{aligned} L_j(y) &= \sum_{i=1}^n L_i(x) \delta_{ji} \\ &= L_1(x) \delta_{j1} + L_2(x) \delta_{j2} + \dots + L_j(x) \delta_{jj} + L_{j+1}(x) \delta_{j(j+1)} + \dots + L_n(x) \delta_{jn} \\ &= L_j(x) \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

bulunur. Tekrar n koşullu interpolasyondan dolayı L_i tektir, $y = x$ 'tir ve bu da (3.5.16) 'nın tek olarak kurulabileceğini söyler. (3.5.18) benzer olarak kurulur.

(Bu teoremde ve tezin kalan kısmında yıldız işareti (*) biortonormal veya ortonormal kümelerin elemanına sembol olarak uygulanır. Bir uzay sembolü üzerindeki yıldız işareti conjugate (eşlenik) uzayları gösterir. (3.5.18) interpolasyon probleminin çözümü determinant formunda verilir.)

Teorem 3.5.2 : Teorem 3.5.1 sağlansın ve $x_1, \dots, x_n$ X 'in bazı olsunlar. Eğer $w_1, \dots, w_n$ keyfi sayılarsa,

$$x = -\frac{1}{G} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ w_1 & L_1(x_1) & L_1(x_2) & \cdots & L_1(x_n) \\ \vdots & & & & \vdots \\ w_n & L_n(x_1) & L_n(x_2) & \cdots & L_n(x_n) \end{vmatrix} \quad (3.5.19)$$

elemanı $L_i(x) = w_i$ $i = 1, 2, \dots, n$ interpolasyon problemini sağlar.

Örnek 3.5.1 (Taylor İnterpolasyonu) :

$$X = \wp_n \quad L_0(f) = f(z_0), \quad L_1(f) = f'(z_0), \dots, L_n(f) = f^{(n)}(z_0)$$

$z_0 = 0$ alırsak,

$$X = \wp_n \quad L_0(f) = f(0), \quad L_1(f) = f'(0), \dots, L_n(f) = f^{(n)}(0)$$

olur.

$$l_n(z) = \frac{z^n}{n!} \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{olsun. O zaman}$$

$$l_0(z) = \frac{z^0}{0!} = 1, \quad l_1(z) = z, \quad l_2(z) = \frac{z^2}{2!}, \quad l_3(z) = \frac{z^3}{3!}, \dots,$$

dir.

$$(3.5.14) \text{ bağlantısına göre, } (L_i(l_j) = \delta_{ij})$$

$$L_i(l_j) = l_j^{(i)}(0) = \left(\frac{z^j}{j!} \right)_{(0)}^{(i)} = \frac{j(j-1)\dots(j-(i-1))(z^{j-i})_{(0)}}{j!} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_{ij}$$

bulunur.

3.6. Newton Formülü

(3.5.3) ve (3.5.17) Lagrange İnterpolasyon formülleri bazı engeller içermektedirler. Eğer n boyutlu uzaydan, bir boyut yüksek olan uzaya geçmek istersek $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ eski kümesiyle ilgili olmayan $y_1^*, y_2^*, \dots, y_{n+1}^*$ elemanlarının tamamen yeni bir kümesini belirlemeliyiz. Newton gösterimiyle hem $x_1, x_2, \dots$ baz elemanlarının hem de $L_1, L_2, \dots$ belirlenmiş fonksiyonellerinin lineer kombinasyonunu alarak bu engeller ortadan kaldırılmaya çalışılır.

$z_0, z_1, \dots, z_n$ $n+1$ farklı nokta olsun. $n+1$ tane bağımsız Newton polinomu

$$1, (z - z_0), (z - z_0)(z - z_1), \dots, (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$$

şeklindedir.

Verilen $w_0, w_1, \dots, w_n$ değerleri için ,

$$p(z_i) = w_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

olacak şekilde $\wp_n$ 'de bir tek p polinomu vardır.

Eğer bu eleman

$$p(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)(z - z_1) + \dots + a_n(z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1}) \quad (3.6.1)$$

formunda temsil edilebilirse söz konusu polinom görülmüş olur.

a_i sabitlerini bulmak için ardışık olarak $z = z_0, z = z_1, \dots$ koyulur ve elde edilen lineer denklemler çözülür. [(3.6.1) 'den ve $p(z_i) = w_i \quad i = 0, 1, \dots, n$ kabulünden):]

$$\begin{aligned} a_0 &= w_0 \\ a_1 &= \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} \\ a_2 &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left(\frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} - \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} \right) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

bulunur.

Not edelim ki $z_0, \dots, z_n$ noktalarının belirli kümesi için her a_i, w_i 'lerin bir lineer kombinasyonudur. Ve üstelik a_0 yalnız w_0 'a bağlıdır. a_1 w_0, w_1, z_0, z_1 'e bağlıdır ve a_2 ise $w_0, w_1, w_2, z_0, z_1, z_2$ 'ye bağlıdır.

Tanım 3.6.1 : (3.6.2) ile ifade edilen a_j sabitlerine $z_0, z_1, \dots, z_j$ 'ye göre $w_0, w_1, \dots, w_j$ değerlerinin **j-inci kesirli farkı** denir ve

$$a_j = [w_0, w_1, \dots, w_j] \quad (3.6.3)$$

şeklinde gösterilir.

$$(3.6.1) \text{ 'de } z^n \text{ 'in katsayısı } a_n, (3.5.8) \text{ 'de } z^n \text{ 'in katsayısı } \sum_{k=0}^n \frac{w_k}{w'(z_k)} \text{ 'dır.}$$

Bundan dolayı

$$a_n = [w_0, w_1, \dots, w_n] = \sum_{k=0}^n \frac{w_k}{w'(z_k)} \quad (3.6.4)$$

bulunur. Burada

$$w(z) = w_n(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n)$$

dir. (3.6.4) 'ten

$$a_0 = w_0$$

$$a_1 = \frac{w_0}{z_0 - z_1} + \frac{w_1}{z_1 - z_0}$$

$$a_2 = \frac{w_0}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)} + \frac{w_1}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)} + \frac{w_2}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)} \quad (3.6.5)$$

dir.

Eğer w_i 'ler f fonksiyonunun z_i 'deki $f(z_i) = w_i$ değerleri olarak alınırsa, (3.6.1) ve (3.6.3) 'ü birleştirerek;

$$p_n(f; z) = \sum_{k=0}^n [f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_k)] (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{k-1}) \quad (3.6.6)$$

$$w_{-1}(z) \equiv 1$$

elde edilir..

Gerçekten ; (3.6.3) 'ten dolayı

$$a_k = [w_0, w_1, \dots, w_n] = [f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_k)]$$

dır. $w(z) = w_n(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n)$ olup, $w_{-1}(z) \equiv 1 \equiv z - z_{-1}$ olmak üzere,

$$w_{k-1}(z) = \prod_{i=0}^k (z - z_{i-1}) = (z - z_{-1})(z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{k-1})$$

olur. Böylece (3.6.1) 'den

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k \prod_{i=0}^k (z - z_{i-1}) = \sum_{k=0}^n a_k w_{k-1}(z)$$

yazılır. Böylece (3.6.6) bulunmuş olur.

Tanım 3.6.2 : İnterpolasyon polinomunun (3.6.6) formuna bir $f(z)$ fonksiyonu için **sonlu Newton serisi** denir.

$$z_0, z_1, \dots, z_n \text{ sabitleri için } L_0, L_1, \dots, L_n \text{ lineer fonksiyonellerini} \quad (3.6.5)$$

şemasına uygun olarak aşağıda olduğu gibi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} L_0(f) &= f(z_0) \\ L_1(f) &= \frac{f(z_0)}{z_0 - z_1} + \frac{f(z_1)}{z_1 - z_0} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

olur. Burada $L_k(f) = a_k$, $f(z_i) = w_i$ $i=0,1,2, \dots$ 'dir.

Bu durumda (3.6.6) formülü:

$$p_n(f; z) = \sum_{k=0}^n L_k(f) w_{k-1}(z) \quad (3.6.8)$$

şeklini alır.

Eğer $0 \leq j \leq n-1$ ise, $w_j(z) \in \wp_n$ olduğundan

$$w_j(z) = p_n(w_j(z); z) \Leftrightarrow p_n(w_j(z); z) - w_j(z) = 0 \quad (*)$$

olur ve böylece

$$w_j(z) = \sum_{k=0}^n L_k(w_j(z)) w_{k-1}(z) \quad (3.6.9)$$

elde edilir.

Gerçekten, (3.6.6)'dan, $f(z) = w_j(z)$ olmak üzere $p_n(w_j(z); z)$ ve $w_j(z)$ için $z = z_0, z_1, \dots, z_n$ noktalarındaki değerlerine bakalım.

Önce (3.6.6) 'da $f(z) = w_j(z)$ alalım ve bunu açık yazalım.

$$p_n(w_j(z); z) = \sum_{k=0}^n [w_j(z_0), w_j(z_1), \dots, w_j(z_k)] (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{k-1}) \quad (**)$$

$$\begin{aligned} &= [w_j(z_0)](z - z_{-1}) + [w_j(z_0), w_j(z_1)](z - z_0) + [w_j(z_0), w_j(z_1), w_j(z_2)](z - z_0)(z - z_1) \\ &\quad + \dots + [w_j(z_0), w_j(z_1), \dots, w_j(z_n)](z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1}) \end{aligned}$$

olur. Şimdi (*) 'ı gösterelim. (**) 'dan:

$$z = z_0 \text{ için } p_n(w_j(z_0); z_0) = [w_j(z_0)] \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = w_j(z_0)$$

$$z = z_1 \text{ için } p_n(w_j(z_1); z_1) = [w_j(z_0)] \cdot 1 + [w_j(z_0), w_j(z_1)](z_1 - z_0) + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$\begin{aligned}
&= w_j(z_0) + \frac{w_j(z_1) - w_j(z_0)}{z_1 - z_0}(z_1 - z_0) \\
&= w_j(z_1)
\end{aligned}$$

dir. Diğerleri de aynı şekilde gösterilir.

Bu şekilde (*) 'daki eşitlikler $z = z_0, z_1, \dots, z_n$ değerleri için $n + 1$ farklı noktada sağlanır. Bu n . dereceden bir polinomun $n+1$ defa 0 olduğunu gösterir. O halde bu polinom 0'a özdeştir. Bundan dolayı (*) 'ın 1. eşitliğini ve (3.6.8) 'i kullanarak da (3.6.9) 'u elde ederiz.

(3.6.9) 'da ardışık olarak $j = 0, 1, 2, \dots$ alınırsa

$$L_k(w_{j-1}(z)) = \delta_{kj} \quad (3.6.10)$$

olur.

Teorem 3.6.1: X sonsuz boyutlu bir vektör uzay ve X 'in elemanlarının bir dizisi $x_1, x_2, \dots$ olsun. Her n için $x_1, \dots, x_n$ 'ler lineer bağımsız ve X^* 'daki lineer fonksiyonların bir dizisi $L_1, L_2, \dots$ olsun. Her n için $n \times n$ determinantı olan

$$\left| L_i(x_j) \right|_{i,j=1}^n \neq 0 \quad (3.6.11)$$

kabul edelim.

O zaman $a_{ii} \neq 0$ olmak üzere a_{ij} ve b_{ij} sabitlerinin tek olarak belirlediği

$$\begin{aligned}
L_1^* &= a_{11}L_1 & x_1^* &= x_1 \\
L_2^* &= a_{21}L_1 + a_{22}L_2 & x_2^* &= b_{21}x_1 + x_2 \\
L_3^* &= a_{31}L_1 + a_{32}L_2 + a_{33}L_3 & x_3^* &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + x_3 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned} \quad (3.6.12)$$

şeklinde iki üçgensel bölge varsa

$$L_i^*(x_j^*) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (3.6.13)$$

dir.

İspat : $L_1^*(x_1^*) = 1$ olduğunu göstermek istiyoruz. (3.6.12) 'nin 1. satırından $x_1^* = x_1$ olduğundan $L_1^*(x_1^*) = L_1^*(x_1) = a_{11}L_1(x_1) = 1$ olmalıdır. Buradan $a_{11} = L_1(x_1)^{-1} \neq 0$ olur. Yani (3.6.11) 'den dolayı payda sıfır olmaz.

İspatı tümevarımla yapacağız. $i, j = 1, 2, \dots, n$ için (3.6.13) 'ün sağlandığını

kabul edelim.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & & & & & & 1 \\
 a_{21} & a_{22} & & & & & b_{21} \quad 1 \\
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & & & b_{n1} \quad b_{n2} \quad \dots \quad b_{n,n-1} \quad 1
 \end{array}$$

$a_{ii} \neq 0 \Rightarrow a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \neq 0$ ve böylece

$$L_i^*(x_j^*) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.6.14)$$

sağlandığını kabul ediyoruz

İlk önce $b_{n+1,1}, b_{n+1,2}, \dots, b_{n+1,n}, 1$ ve bu değerler bilgisiyle sonra $a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,n+1}$ değerlerini $a_{n+1,n+1} \neq 0$ olmak koşuluyla bulabileceğimizi göstereceğiz ve sonuçta

$$L_i^*(x_j^*) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (3.6.15)$$

eşitliği sağlansın. Böylece tümevarımla istenen sonuca ulaşmış oluruz. (3.6.15) 'te yer alan fakat (3.6.14) 'te yer almayan koşullar:

$$\begin{aligned}
 L_i^*(x_{n+1}^*) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 L_{n+1}^*(x_i^*) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 L_{n+1}^*(x_{n+1}^*) &= 1
 \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

dir.

(3.6.16) 'nın ilk eşitliğinin ortaya koyduğu n denklem aşağıdaki sistemi verir:

$$\left. \begin{aligned}
 L_1^*(x_{n+1}^*) &= 0 \\
 L_2^*(x_{n+1}^*) &= 0 \\
 \vdots \\
 L_n^*(x_{n+1}^*) &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

Bunun açık şekli:

(3.6.12) tablolarından sağdaki x_{n+1}^* 'a L_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$ uygulanırsa ,

$$L_i^*(x_{n+1}^*) = L_i(b_{n+1,1}x_1 + b_{n+1,2}x_2 + \dots + b_{n+1,n}x_n + x_{n+1}) = 0$$

olur. Buradan

$$\left. \begin{aligned} b_{n+1,1}L_1^*(x_1) + b_{n+1,2}L_1^*(x_2) + \dots + b_{n+1,n}L_1^*(x_n) &= -L_1^*(x_{n+1}) \\ b_{n+1,1}L_2^*(x_1) + b_{n+1,2}L_2^*(x_2) + \dots + b_{n+1,n}L_2^*(x_n) &= -L_2^*(x_{n+1}) \\ \vdots \\ b_{n+1,1}L_n^*(x_1) + b_{n+1,2}L_n^*(x_2) + \dots + b_{n+1,n}L_n^*(x_n) &= -L_n^*(x_{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (*_1)$$

bulunur.

Bu sistemin katsayılar determinanı sıfırdan farklı ise yani

$$\left| L_i^*(x_j) \right|_{i,j=1}^n \neq 0$$

ise, sistem tek çözüme sahiptir.

$$\begin{aligned} \left| L_i^*(x_j) \right| &= \begin{vmatrix} L_1^*(x_1) & L_1^*(x_2) & \dots & L_1^*(x_n) \\ L_2^*(x_1) & L_2^*(x_2) & \dots & L_2^*(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n^*(x_1) & L_n^*(x_2) & \dots & L_n^*(x_n) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}L_1(x_1) & a_{11}L_1(x_2) & \dots & a_{11}L_1(x_n) \\ a_{21}L_1(x_1) + a_{22}L_2(x_1) & a_{21}L_1(x_2) + a_{22}L_2(x_2) & \dots & a_{21}L_1(x_n) + a_{22}L_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}L_1(x_1) + a_{n2}L_2(x_1) + \dots + a_{nn}L_n(x_1) & \dots & a_{n1}L_1(x_n) + a_{n2}L_2(x_n) + \dots + a_{nn}L_n(x_n) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

dir. Bu son determinanı çarpanlara ayırarak yazarsak,

$$\left| L_i^*(x_j) \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1(x_1) & L_1(x_2) & \dots & L_1(x_n) \\ L_2(x_1) & L_2(x_2) & \dots & L_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n(x_1) & L_n(x_2) & \dots & L_n(x_n) \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{21} \dots a_{nn} \cdot \left| L_i(x_j) \right|_{i,j=1}^n \neq 0$$

dır. Çünkü hipotezden $a_{ii} \neq 0$ $i = 1, 2, \dots, n$ ve (3.6.11) 'den

$$\left| L_i(x_j) \right|_{i,j=1}^n \neq 0$$

dır. Böylece (3.6.16) 'nın ilk eşitliğinin olması için gereken ve yeterli olan koşul sağlanmış olur. Böylece $(*_1)$ sisteminden $b_{n+1,1}, b_{n+1,2}, \dots, b_{n+1,n}$ katsayıları tek olarak bulunur. (3.6.16) 'nın ikinci grubu ve son denklem dikkate alınarak L_{n+1}^* dönüşümü x_1^* 'a $i = 1, 2, \dots, n+1$ uygulanırsa,

$$L_{n+1}^*(x_i^*) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \text{ 'den (3.6.12) kullanılırsa,}$$

$$L_{n+1}^*(x_i^*) = a_{n+1,1}L_1(x_i^*) + a_{n+1,2}L_2(x_i^*) + \dots + a_{n+1,n+1}L_{n+1}(x_i^*) = 0$$

dır.Buradan aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\left. \begin{array}{l} a_{n+1,1}L_1(x_1^*) + a_{n+1,2}L_2(x_1^*) + \dots + a_{n+1,n+1}L_{n+1}(x_1^*) = 0 \\ a_{n+1,1}L_1(x_2^*) + a_{n+1,2}L_2(x_2^*) + \dots + a_{n+1,n+1}L_{n+1}(x_2^*) = 0 \\ \vdots \\ a_{n+1,1}L_1(x_n^*) + a_{n+1,2}L_2(x_n^*) + \dots + a_{n+1,n+1}L_{n+1}(x_n^*) = 0 \\ a_{n+1,1}L_1(x_{n+1}^*) + a_{n+1,2}L_2(x_{n+1}^*) + \dots + a_{n+1,n+1}L_{n+1}(x_{n+1}^*) = 1 \end{array} \right\} \quad (*_2)$$

Bu sistemin tek çözüme sahip olması için

$$|L_i(x_j)|_{i,j=1}^{n+1} \neq 0$$

olmalıdır.

$$|L_i(x_j^*)| = \begin{vmatrix} L_1(x_1^*) & L_2(x_1^*) & \cdots & L_{n+1}(x_1^*) \\ L_1(x_2^*) & L_2(x_2^*) & \cdots & L_{n+1}(x_2^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(x_n^*) & L_2(x_n^*) & \cdots & L_{n+1}(x_n^*) \\ L_1(x_{n+1}^*) & L_2(x_{n+1}^*) & \cdots & L_{n+1}(x_{n+1}^*) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} L_1(x_1) & L_2(x_1) & \cdots & L_{n+1}(x_1) \\ b_{21}L_1(x_1) + L_1(x_2) & b_{21}L_2(x_1) + L_2(x_2) & \cdots & b_{21}L_{n+1}(x_1) + L_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n+1,1}L_1(x_1) + b_{n+1,2}L_1(x_2) + \dots + b_{n+1,n}L_1(x_n) + L_1(x_{n+1}) & \cdots & b_{n+1,1}L_{n+1}(x_1) + \dots + L_{n+1}(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

dir. Bu determinant çarpanlara ayrılırsa;

$$\begin{aligned} |L_i(x_j^*)|_{i,j=1}^{n+1} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n+1,1} & b_{n+1,2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1(x_1) & L_2(x_1) & \cdots & L_{n+1}(x_1) \\ L_1(x_2) & L_2(x_2) & \cdots & L_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(x_{n+1}) & L_2(x_{n+1}) & \cdots & L_{n+1}(x_{n+1}) \end{vmatrix} \\ &= 1.1 \dots 1. \begin{vmatrix} L_1(x_1) & L_1(x_2) & \cdots & L_1(x_{n+1}) \\ L_2(x_1) & L_2(x_2) & \cdots & L_2(x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n+1}(x_1) & L_{n+1}(x_2) & \cdots & L_{n+1}(x_{n+1}) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= 1, \left| L_i(x_j) \right|_{i,j=1}^{n+1} = \left| L_i(x_j) \right|_{i,j=1}^{n+1} \neq 0$$

dır.

Böylece (*₁) ve (*₂) sistemleri tek çözüme sahiptir.

Geriye

$$a_{n+1,n+1} \neq 0 \quad (*_3)$$

olduğunu göstermek kalıyor.

(*₂) sisteminden $a_{n+1,n+1}$ 'i bilinmeyen olarak çözelim.

$$a_{n+1,n+1} = \frac{|A_{n+1}|}{|A|} \text{ dır. Cramer Sistemi'nden çözüm bulunur.}$$

$$|A_{n+1}| = \begin{vmatrix} L_1(x_1^*) & L_2(x_1^*) & \cdots & 0 \\ L_1(x_2^*) & L_2(x_2^*) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ L_1(x_n^*) & L_2(x_n^*) & \cdots & 0 \\ L_1(x_{n+1}^*) & L_2(x_{n+1}^*) & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

determinantını son sütuna göre açarsak;

$$|A_{n+1}| = 1 \cdot (-1)^{(n+1)+(n+1)} = \begin{vmatrix} L_1(x_1^*) & L_2(x_1^*) & \cdots & L_n(x_1^*) \\ L_1(x_2^*) & L_2(x_2^*) & \cdots & L_n(x_2^*) \\ \vdots & & & \vdots \\ L_1(x_n^*) & L_2(x_n^*) & \cdots & L_n(x_n^*) \end{vmatrix}$$

dır. Şimdi bu determinanti yukarıda (n+1)x(n+1) boyutlu determinant için aynen uygularsak;

$$\begin{aligned} |A_{n+1}| &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1(x_1) & L_2(x_1) & \cdots & L_n(x_1) \\ L_1(x_2) & L_2(x_2) & \cdots & L_n(x_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ L_1(x_n) & L_2(x_n) & \cdots & L_n(x_n) \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \left[\left[L_i(x_j)^T \right]_{i,j=1}^n \right]^n = \left| L_i(x_j) \right|_{i,j=1}^n \neq 0 \end{aligned}$$

dır.Böylece

$$a_{n+1,n+1} = \frac{|L_i(x_j)|_{i,j=1}^n}{|L_i(x_j)|_{i,j=1}^{n+1}} \neq 0$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.6.2 : X_n , x 'in $x_1, \dots, x_n$ tarafından gerilmiş bir alt uzayı olsun (yani X_n , $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ lineer kombinasyonunun kümesi olsun). Eğer $x \in X_n$ ise o zaman

$$x = \sum_{k=1}^n L_k^*(x)x_k^*$$

dır.

İspat : Eğer $y = \sum_{k=1}^n L_k^*(x)x_k^*$ ve $y \in X_n$ dersek o zaman (3.6.13) 'den

$$L_j^*(y) = \sum_{k=1}^n L_k^*(x)L_j^*(x_k) = L_j^*(x)$$

bulunur. $x_1, \dots, x_n$ 'ler lineer bağımsız olduklarından (3.6.12) 'den dolayı $x_1^*, \dots, x_n^*$ elemanları da lineer bağımsız olurlar. Böylece (3.6.13) ve Yardımcı Teorem (3.2.1) 'in sonucu olarak $L_1, \dots, L_n$ ve böylece $L_1^*, \dots, L_n^*$ 'lerin lineer bağımsız oldukları görülür. (3.6.12) 'den bu durumda

$$L_j^*(y - x) = 0, \quad j=1, 2, \dots, n$$

olması $y - x = 0$ olmasını ve böylece $y = x$ olmasını gerektirir. İspat biter.

Bir $x \in X$ elamanı için $\sum_{k=1}^{\infty} L_k^*(x)x_k^*$ serisine **biortogonal açılım** denir.

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} L_k^*(x)x_k^* \quad (3.6.17)$$

yazılır.

3.7. Ardışık Farklar

Tanım 3.7.1: $y_0, y_1, \dots$ değerlerinin bir dizisi verilsin. Ardışık değerlerin farkı

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.7.1)$$

şeklinde gösterilir.

Benzer olarak daha yüksek farklar

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(y_{k+1}) - \Delta y_k = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) \quad (3.7.2)$$

şeklinde tanımlanır. Genel olarak

$$\Delta^{n+1} y_k = \Delta(\Delta^n y_k) = \Delta^n y_{k+1} - \Delta^n y_k \quad (3.7.3)$$

yazılır. Burada $\Delta^0 y_k = y_k$ 'dır.

Teorem 3.7.1 : $\Delta^0 y_k = y_k$

$$\Delta^1 y_k = y_{k+1} - y_k$$

$$\Delta^2 y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

$$\Delta^3 y_k = y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k$$

$\vdots$

Genel olarak ;

$$\Delta^n y_k = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \binom{n}{r} y_{k+r}, \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (3.7.4)$$

dir.

.

Sonuç 3.7.2 : $k=0$ için (3.7.4) 'den

$$\Delta^n y_0 = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \binom{n}{r} y_r \quad (3.7.5)$$

elde edilir.

$z_0, z_1, \dots$ noktaları aşağıdaki formda verilsin:

$$z_0 = a, \quad z_1 = a + h, \quad z_2 = a + 2h, \quad \dots, \quad z_n = a + nh \quad (3.7.6)$$

Bu noktalarda interpolasyon halinde kesirli farklar ardışık farklara bağlı olarak verilebilir.

Eğer $w(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n)$ ise,

$$w'(z_k) = (z_k - z_0)(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_n)$$

olur.

$$z_i - z_j = (i - j)h$$

olduğundan

$$\begin{aligned} w'(z_k) &= (kh) \cdot (k-1)h \dots (h)(-h)(-2h) \dots (-(n-k)h) \\ &= h^n k!(n-k)!(-1)^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir.

İnterpolasyon polinomu:

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n w_k \frac{w(z)}{(z - z_k)w'(z_k)} \quad (2.5.8)$$

dir.

Burada z^n 'in katsayısı $\sum_{k=0}^n \frac{w_k}{w'(z_k)}$ 'dır. Bu yüzden

$a_n = [w_0, w_1, \dots, w_n] = \sum_{k=0}^n \frac{w_k}{w'(z_k)}$ 'dir. Bundan dolayı (3.6.4) 'ten

$$\begin{aligned} a_n &= [y_0, y_1, \dots, y_n] = \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{w'(z_k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} y_k}{h^n k!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n! h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k \\ &= \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

elde edilir.

O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.7.3: $p(z)$, $n+1$ sayıda $a, a+h, \dots, a+nh$ noktalarında $y_0, y_1, \dots, y_n$ değerlerini alan $\wp_n$ 'de bir polinom olsun .

O zaman

$$\begin{aligned}
p_n(z) = & y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(z-a) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(z-a)(z-a-h) + \dots \\
& \dots + \frac{1}{n!h^n} \Delta^n y_0 (z-a)(z-a-h) \dots (z-a-(n-1)h)
\end{aligned} \tag{3.7.9}$$

dır.

Eğer $p_n(f; z)$ $a, a+h, \dots, a+nh$ noktalarında f 'ye interpolate edilirse,

$$\begin{aligned}
p_n(f; z) = & f(a) + \frac{\Delta f(a)}{h}(z-a) + \frac{1}{2!h^2} \Delta^2 f(a)(z-a)(z-a-h) + \dots \\
& \dots + \frac{1}{n!h^n} \Delta^n f(a)(z-a)(z-a-h) \dots (z-a-(n-1)h)
\end{aligned} \tag{3.7.10}$$

dır. Burada ,

$$\begin{aligned}
\Delta f(a) &= f(a+h) - f(a) \\
\Delta^2 f(a) &= f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) \\
\Delta^3 f(a) &= f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)
\end{aligned} \tag{3.7.11}$$

yazabiliriz.

(3.7.9) ve (3.7.10) formüllerine **Newton Fark Formülleri** denir.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $a, a+h, a+2h, \dots$ noktalarında tanımlı ise,

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(a)}{k!h^k} (z-a)(z-a-h) \dots (z-a-(k-1)h) \tag{3.7.12}$$

serisine **f için Newton Serisi** denir.

Örnek 3.7.1 : $f(x) = x^n$, o zaman $\Delta f(x) = nhx^{n-1} + \dots$ Bundan dolayı ilk fark $n-1$ dereceli polinomdur. Benzer şekilde

$$\Delta^n x^n = n!h^n \text{ ve } p > n \text{ için } \Delta^p x^n = 0 \text{ 'dır.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\
&= (x+h)^n - x^n \\
&= x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} h^3 + \dots - x^n \\
&= nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)h^2 x^{n-2}}{2} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta nhx^{n-1} + \Delta \frac{n(n-1)h^2 x^{n-2}}{2} + \dots \\
&= nh[(x+h)^{n-1}] - nhx^{n-1} + \dots \\
&= nh[x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}h + \dots] - nhx^{n-1} + \dots \\
&= n(n-1)h^2 x^{n-2} + \dots
\end{aligned}$$

dir. Bunu genelleştirelim.

$$\Delta^n f(x) = n! h^n x^{n-n} = n! h^n$$

bulunur.

$p > n$ için ,

$$\Delta^p x^n = \Delta(\Delta^{p-1} x^n)$$

dir. $p > n$ olduğundan , $p-1 > n-1 \Rightarrow p-1 = n$ alınabilir.

O zaman

$$\begin{aligned}
\Delta^p x^n &= \Delta(\Delta^{p-1} x^n) \\
&= \Delta(\Delta^n x^n) \\
&= \Delta(n! h^n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır.

Örnek 3.7.2 : Eğer $f(x) = e^{ax}$ ise $\Delta f(x) = (e^{ah} - 1)e^{ax}$ 'dir. İterasyonla $\Delta^n f(x) = (e^{ah} - 1)^n e^{ax}$ 'dir.

Örnek 3.7.3 : Eğer $f(x) \in \wp_n$ ise, (2.7.12) serisi $f(x)$ 'e yakınsar. Örnek 3.7.1 'den dolayı seri $n + 1$ terimli bir toplama indirgenir ve Teorem 3.7.3 'den dolayı $a, a + h, \dots, a + nh$ noktalarında f 'ye interpolate olan $\wp_n$ 'in üyesidir. Teklikten dolayı n . dereceden polinom f ile çakışır.

Çözüm : (3.7.12) serisi açık yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(a)}{k! h^k} (z-a)(z-a-h) \dots (z-a-(k-1)h) \\
&= f(a) + \frac{\Delta f(a)}{h} (z-a) + \frac{\Delta^2 f(a)}{2! h^2} (z-a)(z-a-h) + \dots + \frac{\Delta^n f(a)}{n! h^n} (z-a)(z-a-h) \dots (z-a-(n-1)h)
\end{aligned}$$

$f(x) = p_2(x)$ olsun. Özel olarak $f(x) = x^2$ olsun.

$$\Delta^0 f(x) = f(x) = x^2 \Rightarrow \Delta^0 f(a) = f(a) = a^2$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$= (x+h)^2 - x^2$$

$$= 2hx + h^2 \Rightarrow \Delta f(a) = 2ha + h^2$$

$$= \Delta^2 f(x) = \Delta^2 x^2 = 2!h^2 \Rightarrow \Delta^2 f(a) = 2!h^2 = 2.1.h^2$$

$$= \Delta^3 f(x) = \Delta^3 f(a) = \Delta^3 x^2 = 0 \Rightarrow \Delta^3 f(a) = 0 \quad (p=3>2)$$

(3.7.12) 'den,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(a)}{k!h^k} (z-a)(z-a-h) \dots (z-a-(k-1)h) \\ &= a^2 + \frac{2ha + h^2}{h} (z-a) + \frac{2.1.h^2}{2!h^2} (z-a)(z-a-h) + 0 + 0 + \dots \\ &= a^2 + (2a+h)(z-a) + (z-a)(z-a-h) \\ &= a^2 + (z-a)(z+a) \\ &= z^2 \end{aligned}$$

sonucunu buluruz.

Yani serinin toplamı $z = x$ için $f(x) = x^2$ fonksiyonu olur. Kısaca (3.7.12) serisinin kısmi toplamı (3.7.10) polinomudur.

4. KALAN TEORİSİ

Önceki bölümlerde sonuçlar cebirsel işlemler olarak değerlendirildi ve interpolasyon probleminin ortaya konması ile sıkı sıkıya bağımlıydılar. Fakat bu metod yaklaşım teorisi sonuçlarına daha iyi nasıl taşınabilir? Bu sorunun cevabını kalan teorisi içinde arayacağız.

4.1. Polinomlarla İnterpolasyon İçin Cauchy Kalanı

Teorem 4.1.1: $f(x) \in C^n[a, b]$ olsun ve (a, b) 'nin her noktasında $f^{(n+1)}(x)$ 'in var olduğunu kabul edelim.

Eğer, $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ise,

$$f(x) - p_n(f; x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (4.1.1)$$

dır. Burada $\min(x, x_0, x_1, \dots, x_n) < \xi < \max(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ 'dir. ξ noktası $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ ve f 'ye bağımlıdır.

İspat : $p_n(f; x_k) = f(x_k)$ olduğundan $f(x) - p_n(f; x)$ fonksiyonu $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_n$ noktalarında sıfırlanır. x sabit olsun ve $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ 'den farklı olsun.

$$K(x) = \frac{f(x) - p_n(f; x)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)} \quad (4.1.2)$$

olsun. t 'nin aşağıdaki fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$w(t) = f(t) - p_n(f; t) - (t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_n)K(x) \quad (4.1.3)$$

$w(t)$ fonksiyonu $t = x_0, t = x_1, \dots, t = x_n$ noktalarında sıfır olur. Ek olarak (4.1.2) 'den görülür ki $w(t)$ fonksiyonu $t = x$ noktasında da sıfır olur.

$$f(x) - p_n(f; x) - K(x)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = 0$$

olup sol taraf $w(x)$ 'e eşittir. Genelleştirilmiş Rolle Teoremi (2.2.1) 'den $w^{(n+1)}(t)$ türevi $\min(x, x_0, x_1, \dots, x_n) < \xi < \max(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ koşuluna uygun bir ξ

noktasında sıfır olur. Çünkü $w(t)$ fonksiyonu $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ gibi $n + 2$ noktada sıfır olduğundan Genelleştirilmiş Rolle Teoremine göre $w^{(n+1)}(t)$ fonksiyonu ξ 'de sıfır olur.

(4.1.3) 'ten

$$w^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - (n+1)!K(x)$$

dir.

$t = \xi$ için

$$0 = w^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!K(x) \quad (4.1.4)$$

dir. Buradan

$$K(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (4.1.5)$$

dir. Bunu (4.1.2) 'de yerine koyarsak (4.1.1) 'i elde ederiz. Eğer $x=x_k$ ise, (4.1.1) 'in herhangi ξ için sağlandığı açıktır.

Sonuç 4.1.2 (Lineer İnterpolasyon İçin Hata) : $f(x) \in C^1[a, b]$ ve $f''(x)$,

(a, b) 'nin her noktasında var olsun. O zaman $a \leq x \leq b$ için

$$f(x) - \left(\frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \right) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi), \quad a < \xi < b \quad (4.1.6)$$

dir.

İspat : $n = 1$ 'dir. $n + 1 = 2$ 'dir.

$f(x) \in C^1[a, b]$ fonksiyonunun lineer interpolasyonunu (polinomunu)

$L(f; x)$ ile gösterirsek; (4.1.1) 'den

$$f(x) - L(f; x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi)$$

yazılır.

$y = L(f; x)$ diyelim. $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğru denklemi:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

$$\begin{aligned}
y = L(f; x) &= f(a) + \frac{(f(b) - f(a))(x - a)}{b - a} \\
&= \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b)
\end{aligned}$$

dir.

Böylece son eşitlikte $L(f; x)$ değeri yazılırsa (4.1.6) elde edilir.

Bir çok örnekte ξ 'nin değeri tam olarak bilinmez ve aşağıdaki tahmin önemli olur.

$$\text{Sonuç 4.1.3 : } R_n(f; x) = f(x) - p_n(f; x) \quad (4.1.7)$$

olsun. Burada $R_n(f; x)$ Cauchy kalanıdır. Eğer

$$f(x) \in C^{n+1}[a, b]$$

ise,

$$|R_n(f; x)| \leq \left\{ \max_{a \leq t \leq b} |f^{(n+1)}(t)| \right\} \frac{|x - x_0| |x - x_1| \dots |x - x_n|}{(n+1)!} \quad (4.1.8)$$

dır.

İspat : Burada ξ 'nin yeri tam olarak belli değildir. Bu durumda Teorem 4.1.1'e uygun ξ için

$$f^{(n+1)}(\xi) \leq \max |f^{(n+1)}(t)| \quad (*)$$

yazabiliriz.

(4.1.1), (4.1.7) ve (*) kullanılarak ,

$$\begin{aligned}
|R_n(f; x)| &= |f(x) - p_n(f; x)| \\
&= \left| \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \right| \\
&= \frac{|x - x_0| |x - x_1| \dots |x - x_n|}{(n+1)!} \cdot |f^{(n+1)}(\xi)| \\
&\leq \left\{ \max_{a \leq t \leq b} |f^{(n+1)}(t)| \right\} \frac{|x - x_0| |x - x_1| \dots |x - x_n|}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.1.1: $f(x) = \arcsin x$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f(0,5335)$ 'in

değerini elde etmek için $x_0 = 0,5330$ ve $x_1 = 0,5340$ değerleri arasında lineer interpolasyonu kullanalım ve hatayı tahmin edelim.

$x = 0,5335$ 'dir.

$$f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$f''(x) = ((1-x^2)^{-1/2})' = x(1-x^2)^{-3/2}$$

$$f'''(x) = (x(1-x^2)^{-3/2})' = (1+2x^2)(1-x^2)^{-5/2}$$

f''' türevi $0,533 \leq x \leq 0,534$ aralığında pozitif olduğundan $f''(x)$ türev fonksiyonu artan bir fonksiyon olup maksimum değerini $x = 0,534$ sayısında alır. $n = 1$ için (4.1.8) formülü kullanılırsa;

$$|R_1| = |f(x) - p_1(x)| = |f(x) - L(x)| \leq |f''(0,534)| \cdot \frac{|x-x_0||x-x_1|}{2}$$

'den

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq \frac{0,534}{(1-(0,534)^2)^{3/2}} \cdot \frac{|0,5335-0,5330||0,5335-0,5340|}{2} \\ &= \frac{0,534}{(1-(0,534)^2)^{3/2}} \cdot \frac{(0,0005)^2}{2} \leq 1,2 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

bulunur. Doğrudan hesaplama doğru hatanın $1,101 \cdot 10^{-7}$ olduğunu gösterir.

Bu örnek aşağıdaki gerçekleri ortaya koyar. Pratik işlemlerde (4.1.8) 'deki tahmini kullanmak için interpolate edilen fonksiyonun yüksek mertebeden türevine ve belli bir aralıkta bu türevin değeri için bir üst sınıra sahip olmak gerekir. Bu elementer fonksiyonlar için bile oldukça zordur.

Bu zorluğun üstesinden gelmenin çeşitli yolları vardır. Bu yollar yalnızca interpolasyon için hata tahminine değil, aynı zamanda daha yüksek mertebeden türevler gerektiren ortalama değer hata tahminlerine de uygulanır.

İkinci olarak eğer analitik fonksiyonlarla çalışıyorsak ve kompleks düzlemde fonksiyonun değeri için daha yüksek sınır elde edebiliyorsak türevi tahmin etmek için aşağıdaki sonuç önemli olur.

Sonuç 4.1.4 : $A(R)$ analitik fonksiyonlar kümesi olmak üzere, $f(x) \in A(R)$

olsun. Burada R , $[a, b]$ 'yi kapsayan bir bölgedir. C , $[a, b]$ 'yi içinde bulunduran kapalı bir eğri olsun ve $L(C) = C$ 'nin uzunluğu, $M_C = \max_{z \in C} |f(z)|$, $\delta = C$ 'den $[a, b]$ 'ye olan en kısa uzaklık olsun.

O zaman

$$|R_n(f; x)| = |f(x) - p_n(f; x)| \leq \frac{L(C)M_C}{2\pi\delta^{n+2}} |x - x_0| |x - x_1| \dots |x - x_n| \quad (4.1.9)$$

Örnek 4.1.2 : $f(x) = [e^{x^2-4} - 1]^{1/3}$ olsun. $[a, b] = [-1, 1]$, $n = 4$, $x_0 = -1$, $x_1 = \frac{-1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 1$ olsun. $x = \frac{1}{4}$ 'de yapılan hatayı bu noktalarda interpolasyonla tahmin ediniz.

Çözüm : $f(z)$, $|z| < 2$ 'de analitiktir.

$$\begin{aligned} f(z) &= |e^{z^2-4} - 1|^{1/3} \\ &\leq \left(|e^{z^2-4}| + 1 \right)^{1/3} = \left(|e^{x^2+2xyi+(iy)^2-4}| + 1 \right)^{1/3} \\ &= \left(|e^{x^2-y^2-4}| \cdot |e^{i2xy}| + 1 \right)^{1/3} \\ &= \left(e^{\operatorname{Re}(z^2-4)} + 1 \right)^{1/3} \\ &= \left(e^{x^2-y^2-4} + 1 \right)^{1/3} \end{aligned}$$

dir.

$$C = |z| = p, 1 < p < 2, \left(|z| = p \Leftrightarrow |x + iy| = p \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = p \Leftrightarrow x^2 + y^2 = p^2 \right)$$

$$\begin{aligned} M_C &= \max_{z \in C} |f(z)| = \max_{z \in C} |e^{z^2-4} - 1|^{1/3} \leq \left(e^{x^2-y^2-4} + 1 \right)^{1/3} \\ &\leq \left(e^{p^2-4} \cdot 1 + 1 \right)^{1/3} \\ &\leq 2^{1/3} \end{aligned}$$

dir. $\delta = p - 1$ ve $p = 2 - \varepsilon$ yazalım.

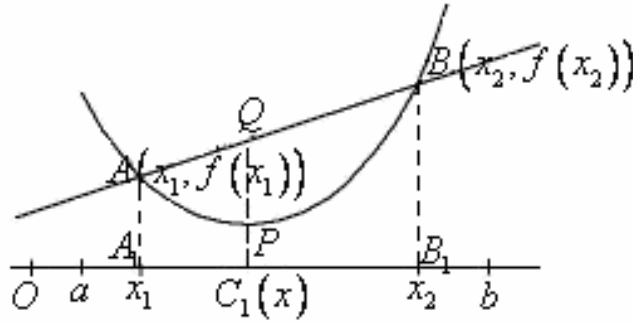
$$\frac{L(C)M_C}{2\pi\delta^{n+2}} \leq \frac{(2\pi)(2-\varepsilon).2^{1/3}}{2\pi(1-\varepsilon)^6}$$

(4.1.9) eşitsizliği $0 < \varepsilon < 2$ için sağlanacağından $\varepsilon \rightarrow 0$ limit alınır,

$$\begin{aligned} \left| R_4 \left(f; \frac{1}{4} \right) \right| &\leq 2^{4/3} \left| \frac{1}{4} - (-1) \right| \left| \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| \left| \frac{1}{4} - 0 \right| \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| \left| \frac{1}{4} - 1 \right| \\ &= 2^{4/3} \left(\frac{5}{4} \right) \cdot \left(\frac{3}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{3}{4} \right) \\ &\approx 0.11 \text{ olur.} \end{aligned}$$

4.2. Konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.2.1 : $f(x)$, $[a, b]$ aralığında tanımlı olsun. Eğrinin iki noktasını birleştiren herhangi bir kiriş eğer eğrinin altında değilse f bu aralıkta konvektir.



1^o. $x_1 < x_2$ olsun. $\left| \overrightarrow{OC_1} \right| = \left| \overrightarrow{OA_1} \right| + \left| \overrightarrow{A_1C_1} \right|$

$$x = \left| \overrightarrow{OC_1} \right| = x_1 + \lambda \left| \overrightarrow{A_1B_1} \right| \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

$$= x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$$

$$= \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1$$

2^o. $x_2 < x_1$ olsun. $\left| \overrightarrow{OC_1} \right| = x_2 + \lambda(x_1 - x_2)$

$$= \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

AB kirişinin denklemi:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$$

dir.

$x = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1$ ile bu denklem kesiştirilirse ,

$$\left| \overrightarrow{C_1 Q} \right| = y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot [\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1 - x_1] + f(x_1)$$

$$= [f(x_2) - f(x_1)]\lambda + f(x_1)$$

$$= \lambda f(x_2) + (1 - \lambda)f(x_1)$$

$$\left| \overrightarrow{C_1 P} \right| = f(x) = f(\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1)$$

$$\left| \overrightarrow{C_1 P} \right| \leq \left| \overrightarrow{C_1 Q} \right| \Leftrightarrow y = f(x) \text{ konvektir} \Leftrightarrow f(\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1) \leq \lambda f(x_2) + (1 - \lambda)f(x_1)$$

(*)

Teorem 4.2.1. : f'' , (a,b) 'de var olsun. O zaman $f(x)$ 'in her kapalı alt aralıkta konveks olması için gerek ve yeter koşul (a,b) üzerinde $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

Teorem 4.2.2 : $f(x)$ [a,b] 'de konveks olsun. Eğer

$$a \leq x_0 < x_0 + h < x_0 + 2h \leq b$$

ise

$$\Delta^2 f(x_0) = f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) \geq 0 \quad (4.2.2)$$

dır.

İspat : Bu eşitsizlik herhangi bir kirişin orta noktasının eğrinin üzerinde veya yukarısında olduğunu söyler.

Gerçekten;

$$(4.2.2) \text{ 'den } \Rightarrow f(x_0 + h) \leq \frac{f(x_0) + f(x_0 + 2h)}{2} \quad (1)$$

Halbuki (*) konvekslik ifadesinde

$$x_2 = x_0 + 2h, \quad x_1 = x_0 \quad \lambda = \frac{1}{2} \text{ alınırsa}$$

$$f\left(\frac{1}{2}(x_0 + 2h) + \frac{1}{2}x_0\right) \leq \frac{1}{2}f(x_0 + 2h) + \frac{1}{2}f(x_0)$$

$$f(x_0 + h) \leq \frac{f(x_0 + 2h) + f(x_0)}{2} \quad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) aynıdır.

4.3. En İyi Hata Tahminleri, Chebyshev Polinomları

(4.1.8) 'deki polinomlarla interpolasyon için hata tahmini iki kısma ayrılır. Birinci kısım $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$, interpolate edilen fonksiyona bağlıdır. Fakat interpolasyonun yapılış tarzından bağımsızdır. İkinci kısım ise $\frac{1}{(n+1)!} |x - x_0| |x - x_1| \dots |x - x_n|$ fonksiyondan bağımsız, fakat noktalara bağımlıdır. (4.1.8) tahmini $|f^{(n+1)}(\xi)|$ yerine $\max |f^{(n+1)}(x)|$ alınarak elde edilmiştir. Çoğu zaman (4.1.8) ile önceden tahmin edilen hatadan büyük olacaktır.

Fakat konuşulduğu üzere birinci kısım kontrolümüz dışında olduğu için ikinci kısma bakalım. İkinci kısımda daha küçük bir hata tahmini yapılabilecektir. $\max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$ ifadesini düşünelim. Bu $x_0, x_1, \dots, x_n$ noktalarına bağlıdır ve bizi aşağıdaki önemli ve ilginç soruya götürür. $[a, b]$ aralığında $x_0, x_1, \dots, x_n$ noktalarını maksimumu mümkün olabildiğince küçük olacak şekilde nasıl seçeriz? Bu problemin cevabı Chebyshev Polinomlarının sıfırları ile verilir.

De Moivre Formülü:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

şeklindedir. $\cos \theta = x$ olsun.

$$\text{Eğer } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ ise } \sin \theta = \sqrt{1 - x^2} \geq 0$$

dır. O zaman

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (x + i\sqrt{1 - x^2})^n$$

dir. Sağ tarafa Binom Açılımı uygulanırsa ,

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} (i\sqrt{1 - x^2}) + \binom{n}{2} x^{n-2} (i\sqrt{1 - x^2})^2 + \dots + \binom{n}{n} i^n (\sqrt{1 - x^2})^n$$

olur. Bu denklemden gerçel kısımlar eşitlenerek,

$$\cos n(\arccos x) = \cos n\theta = x^n + \binom{n}{2} x^{n-2} (x^2 - 1) + \dots \quad (n=0,1,\dots) \quad (4.3.1)$$

bulunur. Burada $x = \cos \theta$ olduğu düşünülürse $\cos n\theta$, $\cos \theta$ 'nın n . dereceden bir polinomudur.

Tanım 4.3.1. : n . dereceden Chebyshev polinomu

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = x^n + \binom{n}{2} x^{n-2} (x^2 - 1) + \dots \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (4.3.2)$$

ile tanımlanır.

Şimdi bir kaç Chebyshev polinomunu yazalım.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$\textbf{Teorem 4.3.1 : } T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.4)$$

dir.

İspat : İspatı yapmak için

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta$$

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta$$

yazalım. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse,

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta - \cos(n-1)\theta$$

elde edilir.

$$\cos \theta = x, \quad \cos n\theta = T_n(x) \text{ olduğundan}$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.2 : $T_n(x) = 2^{n-1}x^n +$ derecesi daha küçük terimler (4.3.5)

İspat : Derecesi daha küçük terimler ifadesini kısaltarak d.d.k.t. olarak yazacağız.

İspatı tümevarımla yapalım.

$$n = 1 \text{ için } T_1(x) = 2^{1-1}x^1 = x,$$

$$n = 2 \text{ için } T_2(x) = 2x^2 + d.d.k.t.$$

dır.

$n-2$ ve $n-1$ için doğru kabul edelim.

$$T_{n-2}(x) = 2^{n-3}x^{n-2} + d.d.k.t.,$$

$$T_{n-1}(x) = 2^{n-2}x^{n-1} + d.d.k.t$$

dır. Şimdi (4.3.4) formülünde n yerine $n-1$ alınırsa,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 2x(2^{n-2}x^{n-1} + d.d.k.t) - (2^{n-3}x^{n-2} + d.d.k.t) \\ &= 2^{n-1}x^n + d.d.k.t \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.3 : $T_n(x)$ polinomunun kökleri

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.3.6)$$

dir.

$T_n(x)$, $-1 \leq x \leq 1$ kapalı aralığında bulunan $n + 1$ sayıda

$$x'_k = \cos \frac{k\pi}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.3.7)$$

x'_k noktalarında ekstremum değerler alır. Bu değerler alternatif olarak $(-1)^k$ 'dir.

İspat : $T_n(x_k) = \cos \left[n \arccos \left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right) \right]$

$$= \cos n \frac{2k-1}{2n} \pi = \cos \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right] = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

dir. Öte yandan,

$$\begin{aligned}
T_n'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} n(-\sin(n \arccos x)) \\
&= \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x)
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
T_n'(x_k) &= \frac{n}{\sqrt{1-x_k^2}} \sin \left[n \arccos x \left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right) \right] \\
&= \frac{n}{\sqrt{1-x_k^2}} \sin(2k-1) \frac{\pi}{2} \neq 0
\end{aligned}$$

dır. Bu yüzden x_k 'lar yalnızca $T_n(x)$ 'i sıfır yapıp, $T_n'(x)$ 'i sıfır yapmadığından basit köklerdir. Yani katlı değildir. Üstelik

$$T_n'(x_k) = n \left(1 - \frac{\cos^2 k\pi}{n} \right)^{-1/2} \sin k\pi = 0 \quad k=1,2,3,\dots,n-1 \quad k \neq 0, \quad k \neq n$$

dir. Çünkü $\left(1 - \cos^2 \frac{k\pi}{n} \right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{k\pi}{n}}}$ ifadesi $k=0$ ve $k=n$ için

tanımsızdır.

$$T_n(x_k) = \cos \left(n \arccos \left(\cos \frac{k\pi}{n} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
T_n(x_k) &= \cos n \frac{k\pi}{n} \\
&= \cos k\pi = (-1)^k
\end{aligned}$$

$$T_n(x_0) = (-1)^0 = 1$$

$$T_n(x_n) = (-1)^n = \begin{cases} 1 & , n \text{ çift} \\ -1 & , n \text{ tek} \end{cases}$$

Böylece $k=0$ için $T_n(x_0)=1$ ve $k=n$ için $T_n(x_n)=\cos n\pi$ değerleri de birer ekstremum değer olduğundan böylece (4.3.7) sağlanmış olur.

Fakat $-1 \leq x \leq 1$ için $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ olduğundan $|T_n(x)| \leq 1$ 'dir. Bu gösterir ki x_k lar yalnızca $-1 \leq x \leq 1$ aralığında ekstremum noktalarıdır. Çünkü türev

$n-1$. derecedendir ve $n-1$ kökü olur. İki tane de uç değerler eksremum olduğundan fonksiyonun eksremum değerlerini aldığı nokta sayısı $n+1$ 'dir.

Tanım 4.3.2: $\tilde{T}_n(x)$ polinomunu

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

eşitliği ile tanımlayalım.

Not edelim ki (4.3.5) 'de $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + d.d.k.t$ olarak elde edildiğinden bu ifade yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa $\tilde{T}_n(x) = x^n + d.d.k.t$ elde edilir.

Teorem 4.3.4 (Chebyshev) : $\tilde{\wp}_n$, baş katsayısı 1 olan bütün n . dereceden polinomların kümesini gösterebilir. Her $p \in \tilde{\wp}_n$ için

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \quad (*)$$

dir.

İspat : $-1 \leq x \leq 1$ üzerinde tanım (4.3.2) 'den

$$|\tilde{T}_n| = \frac{1}{2^{n-1}} |T_n|$$

yazılır. Böylece $|T_n| = 1$ olduğundan $|\tilde{T}_n|$, $-1 \leq x \leq 1$ aralığı üzerinde

$$x'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

noktalarında maksimum değeri olan $\frac{1}{2^{n-1}}$ 'i $n+1$ defa kabul eder.

(*) ifadesinin aksine olarak;

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

olacak şekilde bir $p \in \tilde{\wp}_n$ polinomunun var olduğunu kabul edelim.

$$Q(x) = \tilde{T}_n(x) - p(x)$$

eşitliği ile $Q(x)$ polinomunu tanımlayalım. $Q(x) \in \tilde{\wp}_{n-1}$ 'dir.

$$Q(x'_k) = \tilde{T}_n(x'_k) - p(x'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p(x'_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

olur. Öte yandan $|p(x'_k)| < \frac{1}{2^{n-1}}$ olduğundan $Q(x'_k)$ değeri sırayla + ve - işaretlerini alır.

Bu yüzden $Q(x)$ 'in farklı işaretli değerler aldığı

$$(x'_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

gibi $n + 1$ nokta vardır. Böylece $Q(x)$ polinomu (bir eksik sayıda) n tane sifıra sahip olur. Oysa $Q(x) \in \wp_{n-1}$ idi. O halde $Q(x)$ 'in özdeş olarak sıfır olması gerekir. Yani $Q(x) \equiv 0$ olmalıdır. Böylece $p(x) \equiv \tilde{T}_n(x)$ bulunur.

Bu ise,

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_n(x)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

dir. Bu bir çelişkidir. O halde (*) doğrudur.

$$\textbf{Sonuç 4.3.5 : } \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

dir.

İspat : Daha önce gördük ki,

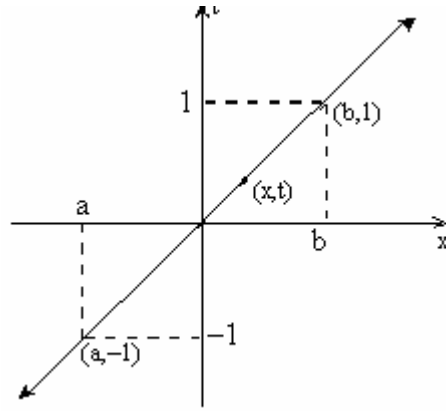
$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

olarak alınabilir.

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \geq \max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\textbf{Sonuç 4.3.6 : } \max_{a \leq x \leq b} |a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n| \geq |a_0| \frac{(b-a)^n}{2^{n-1}}$$

İspat:



Doğru denklemi:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{t - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{x - a}{b - a}$$

$$x = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

dir.

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_n| &= \max_{-1 \leq t \leq 1} \left| a_0 \left[\frac{(b-a)}{2}t + \frac{b+a}{2} \right]^n + \dots + a_n \right| \\ &= |a_0| \frac{(b-a)^n}{2^n} \max_{-1 \leq t \leq 1} |t^n + d.d.k.t| \\ &\geq |a_0| \frac{(b-a)^n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= |a_0| \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$T_{n+1}(x)$ 'in sıfırları olan $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarını interpolasyon noktaları olarak alırsak,

$T_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ olur. Çünkü tanım (4.3.2) 'den

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n(x) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} [2^{n-1} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)] \\ &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \end{aligned}$$

dir. (4.1.1) formülünden

$$R_n(f; x) = \frac{\tilde{T}_{n+1}(x)}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \quad , \quad -1 < \xi < 1 \quad (4.3.9)$$

ve (4.1.8) 'den

$$|R_n(f; x)| = \left| \frac{T_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n+1)!} |T_{n+1}(x)| |f^{(n+1)}(\xi)| \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_{n+1}(x)| \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.3.10)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.4. Kesirli Farklar ve Ortalama Değer

Teorem 4.4.1 : $R_n(f; z) = f(z) - p_n(f; z)$

$$= [f(z), f(z_0), \dots, f(z_n)](z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n) \quad (4.4.1)$$

dir.

İspat : Burada

$$[f(z), f(z_0), \dots, f(z_n)]$$

kesirli farkı

$$[f(z), f(z_0), \dots, f(z_n)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z & z_0 & \dots & z_n \\ z^2 & z_0^2 & \dots & z_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z^n & z_0^n & \dots & z_n^n \\ f(z) & f(z_0) & \dots & f(z_n) \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z & z_0 & \dots & z_n \\ z^2 & z_0^2 & \dots & z_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z^n & z_0^n & \dots & z_n^n \\ z^{n+1} & z_0^{n+1} & \dots & z_n^{n+1} \end{vmatrix}$$

(4.4.2)

dir. (DAVIS, P. J., 'Interpolation and Approximation', Dover Publication, Inc., New York(1975) (2.6.23) 'ten)

Burada payda D ile gösterilirse; (1. sütundan dolayı D, P_{n+1} 'in elemanıdır) Sondan önceki satırdan başlayarak her satır z ile çarpılır ve altındaki satırdan çıkarılırsa;

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z & z_0 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^n & z_0^n & \dots & z_n^n \\ z^{n+1} & z_0^{n+1} & \dots & z_n^{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z-z & z_0-z & \dots & z_n-z \\ z^2-z.z & z_0^2-z_0^2.z & \dots & z_n^2-z_n^2.z \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z^{n+1}-z^n.z & z_0^{n+1}-z_0^n.z & \dots & z_n^{n+1}-z_n^n.z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & z_0-z & z_1-z & \dots & z_n-z \\ 0 & z_0(z_0-z) & z_1(z_1-z) & \dots & z_n(z_n-z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & z_0^n(z_0-z) & z_1^n(z_1-z) & \dots & z_n^n(z_n-z) \end{vmatrix} \\
&= (z_0-z)(z_1-z)(z_2-z) \dots (z_n-z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_0^n & z_1^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1} (z-z_0)(z-z_1) \dots (z-z_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_0^n & z_1^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.4.2) 'nin payının 1. sütuna göre açılmasından,

$$\Phi(z) = [f(z), f(z_0), \dots, f(z_n)](z-z_0)(z-z_1) \dots (z-z_n) \quad (*_1)$$

bulunur. Gerçekten;

$$Q(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z & z_0 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z^n & z_0^n & \dots & z_n^n \\ f(z) & f(z_0) & \dots & f(z_n) \end{vmatrix}}{D}$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^{n+2+1} \cdot f(z) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_0^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1+1} \cdot z^n \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(z_0) & \dots & f(z_n) \end{vmatrix} + \dots \\
& = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_0^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix}}{(-1)^{n+1} (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(z_0) & \dots & f(z_n) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Böylece (4.4.2) 'den $Q(z) = [f(z), f(z_0), \dots, f(z_n)]$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& [f(z), f(z_0), \dots, f(z_n)](z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n) \\
& = \frac{(-1)^{n+2+1} \cdot f(z) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_0^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1+1} z^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(z_0) & \dots & f(z_n) \end{vmatrix}}{(-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_0^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix}} \\
& = (-1)^2 f(z) + q(z) \\
& = f(z) + q(z)
\end{aligned} \tag{*}_2$$

olur. (Burada $q(z) \in \wp_n$ 'dir). Böylece

$$\phi(z) = f(z) + q(z) \tag{*}_3$$

olur.

(*)_1 'den $\phi(z_i) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$ olur.

(*)_3 'den $0 = f(z_i) + q(z_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$

bulunur. Buradan $f(z_i) = -q(z_i)$ olur.

İnterpolasyon polinomunun tekliğinden

$$q(z) = -p_n(f; z)$$

yazılır. Sonuç olarak $\phi(z) = f(z) - p_n(f; z)$ olur ve böylece (4.4.1) elde edilir.

Sonuç 4.4.2 : $f(x) \in C[a, b]$ olsun ve varsayalım ki $f^{(n+1)}(x)$ (a,b) 'nin her noktasında var olsun. Eğer $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ve $x \in [a, b]$ ise,

$$\left[f(x), f(x_0), \dots, f(x_n) \right] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (4.4.3)$$

dır. Burada $\min(x, x_0, \dots, x_n) < \xi < \max(x, x_0, \dots, x_n)$ 'dir.

İspat : Teorem 4.1.1 'den

$$f(x) - p_n(f; x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

eşitliği vardır.

Teorem (4.4.1) 'den

$$\begin{aligned} R_n(f; z) &= f(z) - p_n(f; z) \\ &= \left[f(z), f(z_0), \dots, f(z_n) \right] (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n) \end{aligned}$$

Burada $z = x$ alınarak iki formülün sağ yanları eşitlenirse (4.4.3) formülü elde edilir.

Sonuç 4.4.3 : $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ olsun. Eğer $x \in [a, b]$ ise,

$$\lim_{x_i \rightarrow x} \left[f(x), f(x_0), \dots, f(x_n) \right] = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (4.4.4)$$

dir.

İspat : $\min(x, x_0, \dots, x_n) < \xi < \max(x, x_0, \dots, x_n)$ olduğundan $x_i \rightarrow x$ için $\min(x, x_0, \dots, x_n) = x$ ve $\max(x, x_0, \dots, x_n) = x$ olur ve $\xi = x$ bulunur. Böylece $\xi = x$ dersek, $x_i \rightarrow x \Leftrightarrow \xi \rightarrow x$ olacağından (4.4.3) 'ün iki yanının $x_i \rightarrow x$ için limiti alınırsa ,

$$\lim_{x_i \rightarrow x} \left[f(x), f(x_0), \dots, f(x_n) \right] = \lim_{x_i \rightarrow x} f^{(n+1)}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$$

bulunur.

Noktaların eşit aralıklı olması halinde, ardışık farklar için ortalama değer teoremini elde ederiz.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = a + h, \quad \dots, \quad x_n = a + nh$$

$$\left[f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n) \right] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n} \quad (*)$$

yazılır. Bunu sonuç (4.4.2) ile birleştirirsek aşağıdaki sonucu buluruz.

Sonuç 4.4.4: $f(x) \in C[a, b]$ olsun ve varsayalım ki $f^{(n)}(x)$ (a, b) 'nin her noktasında var olsun, O zaman

$$\Delta^n f(x_0) = h^n f^{(n)}(\xi) \quad x_0 < \xi < x_n \quad (4.4.5)$$

dır. $n = 1$ için bu bilinen ortalama değer teoremidir.

İspat : (4.4.3) 'te $n + 1$ yerine n alınırsa ,

$$[f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

olur. (*) ve bu sonuçtan;

$$\frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$\Delta^n f(x_0) = h^n f^{(n)}(\xi)$$

bulunur. Böylece (4.4.5) elde edilir. Burada $n = 1$ alınırsa;

$$\Delta f(x_0) = h f'(\xi) \quad x_0 < \xi < x_1$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

olduğundan

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(\xi)$$

bulunur. Bu bilinen ortalama değer teoremidir.

Örnek 4.4.1 : Varsayalım ki f bir h aralığında sıralansın ve a ve $a + h$ ardışık noktaları arasındaki bir x noktasında f 'nin değerini lineer interpolasyon ile elde etmek istiyoruz. Sonuç (4.1.2) 'den hesaplanan hata,

$$R_1 = \frac{(x-a)(x-a-h)}{2} = f''(\xi) \quad a < \xi < a+h \quad (*_1)$$

dir. (4.4.5) 'den $\Delta^2 f(a) = h^2 f''(\xi)$ dır. Eğer h yeteri kadar küçükse buradan,

$$f''(\xi) \approx \frac{1}{h^2} \Delta^2 f(a) \quad (*_2)$$

dir. Öte yandan

$$\max |(x-a)(x-a-h)| = \frac{h^2}{4}$$

olur. $(*_1)$ ve $(*_2)$ 'den

$$|R_1| \leq \frac{1}{8} h^2 \cdot \frac{1}{h^2} |\Delta^2 f(a)|$$

dır. Buradan

$$|R_1| \leq \frac{1}{8} |\Delta^2 f(a)|$$

bulunur. Bu bize bir kural verir. Lineer interpolasyonda hata 2. farkın $\frac{1}{8}$ 'ini geçmez.

4.5. Peano Teoremi ve Sonuçları

Eğer polinomlarla interpolasyon için Cauchy Kalanı (4.1.1) dikkatle gözden geçirilirse, $f^{(n+1)}(\xi)$ kısmının önemli bir rol oynadığı görülür. Örneğin, $f \in \wp_n$ ise, $f^{(n+1)} \equiv 0$ 'dir. Dolayısıyla $R_n(f; x)$ Cauchy Kalanı özdeş olarak sıfır olur. Belirlenmiş bir x için $R_n(f; x) = f(x) - p_n(f; x)$ kalanına bir lineer fonksiyonel olarak bakılabilir. Bu R_n operatörü f üzerinde bir operatör olup $\wp_n$ 'in bütün elemanlarında sıfırlanır. Eğer bir lineer fonksiyonel bu özelliğe sahipse o zaman $f^{(n+1)}$ 'in bir basit temsiline sahip olmalıdır.

Genelliği sağlamak için $C^{(n+1)}[a, b]$ fonksiyonlar sınıfını düşünelim ve bu sınıf üzerinde aşağıdaki tipte bir lineer fonksiyonel verilmiş olsun.

$$L(f) = \int_a^b [a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) + \dots + a_n f^{(n)}(x)] dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{j_0} b_{i0} f(x_{i0}) + \sum_{i=1}^{j_1} b_{i1} f'(x_{i1}) + \dots + \sum_{i=1}^{j_n} b_{in} f^{(n)}(x_{in})$$
(4.5.1)

Burada $a_i(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde parçalı sürekli kabul edilirler ve x_i noktaları $[a, b]$ üzerinde bulunurlar.

Teorem 4.5.1 (Peano): $\forall p \in \wp_n$ için $L(p) = 0$ olsun. O zaman $\forall f \in C^{n+1}[a, b]$ için

$$L(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(t) dt$$
(4.5.2)

dir. Burada

$$K(t) = \frac{1}{n!} Lx \left[(x-t)_+^n \right] \quad (4.5.3)$$

$$\begin{aligned} (x-t)_+^n &= (x-t)^n \quad x \geq t \text{ ise,} \\ (x-t)_+^n &= 0 \quad x < t \text{ ise,} \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

$L_x \left[(x-t)_+^n \right]$ gösterimi L fonksiyonelinin x 'in bir fonksiyonu olarak $(x-t)_+^n$ 'ye uygulandığını ifade eder.

İspat : Teorem (2.2.2)'ye göre $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ ve $x_0 \in [a,b]$ olsun. O zaman $a \leq x \leq b$ için

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \quad (*_1)$$

dir. Önce bu teoremin ispatını görelim.

$$I = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n dt$$

olsun. Kısmi integral uygulanırsa,

$$I = -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt$$

bulunur. Bu ifadedeki son terim I_1 ile gösterilir ve tekrar kısmi integral uygulanırsa,

$$I_1 = -\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_0}^x f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} dt$$

elde edilir. I_1 değeri yerine yazılırsa,

$$I = -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_0}^x f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} dt$$

bulunur. Böyle devam edilirse,

$$I_{n-1} = \frac{1}{1!} \int_{x_0}^x f''(t)(x-t) dt$$

olur. Tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$I_{n-1} = -\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

$$= -\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + f(x) - f(x_0)$$

bulunur. Bu integraller ardışık olarak yerine yazılır ve düzenlenirse Teorem 2.2.1 ispat edilmiş ve $(*)_1$ ifadesi elde edilmiş olur. $(*)_1$ 'de $x_0 = a$ alınrsa,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \quad (*_2)$$

elde edilir.

(4.5.4) koşulları dikkate alındığında $(*)_2$ 'deki son terim yerine

$$\frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t) dt$$

yazılabilir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n dt &= \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \quad (x \geq t) \\ &+ \frac{1}{n!} \int_x^b f^{(n+1)}(t) 0 dt \quad (x < t) \end{aligned}$$

dir.

Şimdi L operatörü $(*)_2$ 'nin her iki tarafına uygulanırsa, $\mathcal{D}_n$ 'in bütün elemanları için L sıfır olduğundan,

$$L(f) = \frac{1}{n!} L \int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n dt \quad (4.5.6)$$

elde edilir. (Yani $Lf(a) = 0$, $L(x-a) = 0, \dots, L(x-a)^n = 0$ dır).

(4.5.1) ifadesi L için kabul edildiğinden hipotezin koşulları altında (4.5.6) ifadesinde integral ile L fonksiyonelinin yerleri değiştirilebilir. Böylece

$$L(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) L_x \left[(x-t)_+^n \right] dt \quad (4.5.7)$$

yazılır ve buradan (4.5.2) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. Burada $K(t)$, L fonksiyoneli için Peano çekirdeği olarak adlandırılır.

(4.5.6) 'dan (4.5.7) 'nin elde edilişi:

1. Leibniz Kuralı : $\phi(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ fonksiyonu verilsin. Eğer $u = f(x,t)$

fonksiyonu ve $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevi

$$B = \{(x,t) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$$

bölgesinde sürekli iseler,

$$\phi'(t) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx \quad (c \leq t \leq d)$$

dir. Bu formüle **1. Leibniz Kuralı** denir.

(4.5.1) formülü şöyledir:

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_a^b \left[a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) + \dots + a_n(x)f^{(n)}(x) \right] dx \\ &+ \sum_{i=1}^{j_0} b_{i0} f(x_{i0}) + \sum_{i=1}^{j_1} b_{i1} f'(x_{i1}) + \dots + \sum_{i=1}^{j_n} b_{in} f^{(n)}(x_{in}) \end{aligned} \quad (*_1)$$

şimdi L_k ve L_{ik} fonksiyonellerini aşağıda olduğu gibi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} L_k(f) &= \int_a^b a_k(x) f^{(k)}(x) dx; \quad k = 0, 1, \dots, n \\ L_{ik}(f) &= \sum_{i=1}^{j_k} b_{ik} f^{(k)}(x_{ik}) \quad k = 0, 1, \dots, n \\ &\quad i = 1, 2, \dots, j_k \end{aligned} \quad (*_2)$$

(*_1) 'den

$$L(f) = \sum_{k=0}^n L_k(f) + \sum_{k=0}^n L_{ik}(f) \quad (*_3)$$

olduğu görülür.

(*_3) 'de

$$f(x) = \int_a^b f(x,t) dt \quad (\text{Leibniz kuralında } x \text{ ile } t \text{ yer değiştirir.})$$

koyalım. (4.5.6) 'da $f(x,t) = (x-t)^n$ 'dir.

O halde

$$L\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \sum_{k=0}^n L_k\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) + \sum_{k=0}^n L_{ik}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) \quad (*_4)$$

$$\begin{aligned} L_k\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) &= \int_a^b a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \left(\int_a^b f(x,t)dt\right) dx \\ &= \int_a^b a_k(x) \left(\int_a^b \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t)dt\right) dx \quad (\text{I. Leibniz kuralı}) \\ &= \int_a^b \int_a^b a_k(x) \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}\right)(x,t) dt dx \end{aligned} \quad (i)$$

L_k 'nın tanımından;

$$\int_a^b L_{(k)} x [f(x,t)] dt = \int_a^b \left(\int_a^b a_k(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t) dx \right) dt \quad (ii)$$

dır. İntegral sınırları aynı olduğundan (i) ve (ii) nin sağ yanları eşittir.

O halde

$$L_k\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int_a^b L_{(k)} x [f(x,t)] dt$$

bulunur. Aynı şekilde,

$$\begin{aligned} L_k\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) &= \sum_{i=1}^{j_k} b_{ik} \frac{d^k}{dx^k} \left(\int_a^b f(x,t)dt\right)_{x=x_{ik}} \\ &= \sum_{i=1}^{j_k} b_{ik} \int_a^b \left[\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial x^k} \right]_{x=x_{ik}} dt \end{aligned} \quad (i)$$

olur. L_{ik} 'nın tanımından

$$\int_a^b L_{(ik)} x [f(x,t)] dt = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{j_k} b_{ik} \left[\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial x^k} \right]_{x=x_{ik}} \right] dt \quad (ii)$$

dir. (i) ve (ii) 'den

$$L_{ik}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int_a^b L_{(ik)} x [f(x,t)] dt$$

bulunur. Böylece bütün terimlerde integral ile operatörler yer değiştirdi. O halde (4.5.6) 'dan (4.5.7) 'ye geçiş doğrulanmış olur.

Sonuç 4.5.2: Eğer yukarıdaki hipoteze ek olarak $K(t)$ çekirdeği $[a,b]$ üzerinde işaret değiştirmiyorsa o zaman her $f \in C^{n+1}[a,b]$ için

$$L(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} L(x^{n+1}), \quad a \leq \xi \leq b \quad (4.5.8)$$

dir.

İspat : İntegral için 1. ortalama değer teoremine göre,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad (*)$$

dir. Burada $f, g \in C[a,b]$, $g \geq 0$ ve $a \leq \xi \leq b$ 'dir.

(4.5.2) ve (*) 'dan

$$L(f) = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b K(t)dt \quad a \leq \xi \leq b \quad (4.5.9)$$

bulunur. $f = x^{n+1}$ alınırsa,

$$L(x^{n+1}) = (n+1)! \int_a^b K(t)dt \quad (4.5.10)$$

elde edilir.

(4.5.10) 'dan bulunan

$$\int_a^b K(t)dt = \frac{L(x^{n+1})}{(n+1)!}$$

değeri (4.5.9) 'da yerine yazılırsa (4.5.8) sonucu elde edilir.

Örnek 4.5.1 (Polinomlarla İnterpolasyon İçin Kowalewski'nin Tam Kalamı) :

$x, x_0, \dots, x_n$ $[a,b]$ 'de belirlenmiş olsunlar.

$$L(f) = R_n(f; x) = f(x) - \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x)$$

olsun. (3.5.9) 'da

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}$$

ve

$$p_n(x_k) = f(x_k) \quad k = 0, 1, \dots, n$$

dir. Burada $p_n(x) = p(f; x)$ 'dir.

O halde (4.5.3) 'ten $f(x) = (x-t)_+^n$ alarak,

$$\begin{aligned} n!K(t) &= L_x(x-t)_+^n = (x-t)_+^n - \sum_{k=0}^n (x_k - t)_+^n \ell_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \left[(x-t)_+^n - (x_k - t)_+^n \right] \ell_k(x) \end{aligned} \quad (*)$$

olur. Bu son ifadede (3.5.13) ile verilen

$$\sum_{k=0}^n \ell_k(x) \equiv 1$$

ifadesi kullanılmıştır.

Bu ifadeyi daha uygun bir forma koyalım. Belirlenmiş k için (4.5.4) 'ten

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[(x-t)_+^n - (x_k - t)_+^n \right] f^{(n+1)}(t) dt \\ \left(= \int_a^x \left[(x-t)^n - (x_k - t)^n \right] f^{(n+1)}(t) dt + \int_x^{x_k} \left[0 - (x_k - t)^n \right] f^{(n+1)}(t) dt + \int_{x_k}^b \left[0 - 0 \right] f^{(n+1)}(t) dt \right) \\ = \int_a^x \left[(x-t)^n - (x_k - t)^n \right] f^{(n+1)}(t) dt + \int_{x_k}^x \left[(x_k - t)^n \right] f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

dir. Böylece (*) eşitliğinin iki yanı $f^{(n+1)}(t)$ ile çarpılır ve integral alınarak yukarıdaki işlemler dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_a^b n!K(t) f^{(n+1)}(t) dt &= \int_a^b f^{(n+1)}(t) \left(\sum_{k=0}^n \left[(x-t)_+^n - (x_k - t)_+^n \right] \ell_k(x) \right) dt \\ &= \int_a^x f^{(n+1)}(t) \left(\sum_{k=0}^n \left[(x-t)^n - (x_k - t)^n \right] \ell_k(x) \right) dt + \sum_{k=0}^n \ell_k(x) \int_{x_k}^x (x_k - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

olur. Yukarıda kullanılan (3.5.13) yeniden kullanılırsa;

$$\sum_{k=0}^n \left[(x-t)^n - (x_k - t)^n \right] \ell_k(x) = (x-t)^n - \sum_{k=0}^n (x_k - t)^n \ell_k(x)$$

yazılır. (3.5.9) eşitliğinde $f(x_k) = (x_k - t)^n$ ise, $f(x) = (x - t)^n$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^n (x_k - t)^n \cdot \ell_k(x) = p_n((x - t)^n, x) = (x - t)^n$$

dir.

O halde yukarıdaki son toplamda 1. terim içindeki toplam sıfıra özdeş olacağından (4.5.2) ve (4.5.3) dikkate alınarak $f \in C^{(n+1)}[a, b]$ için

$$L(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(t) dt = f(x) - p_n(f; x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \ell_k(x) \int_{x_k}^x (x_k - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (4.5.11)$$

dir.

KAYNAKLAR

CHENEY, E.W.,1966. Introduction to Approximation Theory. McGraw-Hill Book Company, New York.

DAVIS, P.J.,1975. Interpolation and Approximation. Dover Publication, Inc., New York.

FEINERMAN, R.P., NEWMAN, D.J.,1974.Polinomial Approximation. The Williams & Wilkins Company, Baltimore.

HAASER, N.B., SULLIVIAN,J.A., 1971. Reel Analysis. Van Nostrand Reinhold Company, New York.

LORENTZ, G.G., 1966. Approximation of Function. United States of America.

LORENTZ, G.G., CHUI, C. K. AND SCHUMAKER, L.L., 1976. Approximation Theory II. Academic Pres.Inc., New York.

OSTROWSKI, A.M., 1973. Solution of Equation in Euclidean and Banach Spaces. Academic Press.Inc., New york and London.

RIVLIN, T.J., 1974. The Chebyshev Polynomials , John Wiley and Sons Inc., Printed in United States of America.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Adana’da doğdum.İlköğrenimimi Lütfiye Kısacık İlkokulu ’nda, ortaöğrenimimi Adana Anadolu Lisesi ’nde tamamladım. 1996 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim ve 2000 yılında mezun oldum. Aynı yıl Adana’nın Kozan İlçesi Yüksekören Köyü İlköğretim Okulu’nda matematik öğretmenliği görevine başladım. 2003 yılında tayinim Adana’nın Yüreğir İlçesi ’nde bulunan Tahsilli İlköğretim Okulu’na çıktı. 2005 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü ’nde Yüksek Lisans yapmaya başladım. Halen Tahsilli İlköğretim Okulu ’nda görev yapmaktayım.