ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selin SARAÇ

ÜRETİM SİSTEMLERİNDE KARMA VE SAF DAĞILIM MODELLERİNİN ETKİNLİK KARŞILAŞTIRILMASI

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ADANA-2018

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜRETİM SİSTEMLERİNDE KARMA VE SAF DAĞILIM MODELLERİNİN ETKİNLİK KARŞILAŞTIRILMASI

Selin SARAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu Tez …/…/2018 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile Kabul Edilmiştir.

……. …….. …….

Dr. Öğr. Üyesi Melik KOYUNCU Prof.Dr. Ali KOKANGÜL Prof.Dr. Hamza EROL
DANIŞMAN ÜYE ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜRETİM SİSTEMLERİNDE KARMA VE SAF DAĞILIM MODELLERİNİN ETKİNLİK KARŞILAŞTIRILMASI

Selin SARAÇ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Melik KOYUNCU
Yıl: 2018, Sayfa: 198
Jüri : Dr. Öğr. Üyesi Melik KOYUNCU
: Prof. Dr. Ali KOKANGÜL
: Prof. Dr. Hamza EROL

Bu çalışmada kuyruk sisteminde işlem süresi herhangi bir bilinen teorik saf dağılıma uymadığı zaman, karma dağılım modeli ile temsil edilmesi konusu çalışılmıştır. Karma dağılım modelinin performansını belirleyebilmek için işlem süresinin normal karma dağılımlardan ve üstel karma dağılımlardan oluştuğu kuyruk sistemleri için incelenmiştir. Kuyruk sistemi analizi için parametre belirlenirken özellikle işlem süresi üzerinde durulmuştur. c^2 testi uygulanarak işlem süresi için istatistiksel dağılım modeli ve parametreleri tahmin edilmeye çalışılmıştır. Bilinen herhangi bir teorik saf dağılıma uymadığı durumlarda ampirik dağılım oluşturulmuştur. Fakat ampirik dağılımı oluşturmak özellikle belirli aralıkta veri yığılması mevcutsa çok uzun sürdüğünden dolayı, bu veriler normal karma dağılım yaklaşımıyla temsil edilmeye çalışılmıştır. Veri setinin P-P, Q-Q grafikleri, Akaike ve Bayesian bilgi kriterleri yardımıyla bileşen sayısı belirlenmiştir. Beklenti-Maksimizasyon algoritması çalıştırılarak her bir bileşenin ortalama, standart sapma ve karma oranı hesaplanmıştır. Normal karma dağılım ve ampirik dağılım yaklaşımları ile hesaplanan kuyrukta bekleme süreleri teorik sonuçlar ile karşılaştırıp performansı değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Karma Dağılım, Saf Dağılım, Kuyruk Teorisi, Beklenti Maksimizasyon Algoritması

ABSTRACT

MSc THESIS

EFFECTIVENESS COMPARISONS OF MIXTURE AND PURE DISTRIBUTIONS MODELS IN PRODUCTION SYSTEMS

Selin SARAÇ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF INDUSTRIAL ENGINEERING

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Melik KOYUNCU
Year: 2018, Pages: 198
Jury : Asst. Prof. Dr. Melik KOYUNCU
: Prof. Dr. Ali KOKANGÜL
: Prof. Dr. Hamza EROL

In this study, a mixture distribution model was used when the server time in the queuing system did not fit any known theoretical pure distribution. To determine the performance of the mixture distribution, normal mixture distributions and exponential mixture distributions model of the process time were used. Chi-square test was applied to estimate the statistical distribution and parameters for the server time. An empirical distribution was established when there was no known theoretical pure distribution. However, when the empirical distribution is used, the queuing system is tried to be represented by the normal mixture distribution approach. Because the empirical distribution takes a long time to produce, especially if there is a certain amount of data accumulation. The number of components has been determined with the aid of P-P, Q-Q plot, Akaike and Bayesian information criteria. After estimating the number of components, the mean, standard deviation, and mixture proportion parameter of each component were calculated using the Expectation-Maximization algorithm. The queuing times calculated by normal mixture distribution and empirical distribution approaches were compared with the theoretical results and their performance was evaluated.

Keywords: Mixture Distribution, Pure Distribution, Queue Theory, Expectation-Maximization Algorithm

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Normal karma dağılım modellerinin performansı kesin çözümü olan M/M/1 ve M/G/1 kuyruk sistemlerinde test edilmiştir.

Karma dağılım modellerindeki tahmin edilen bileşen sayısı ve parametrelerin doğruluğunu tespit edebilmek açısından 10000 adet sayı belirli bir sistematik içerisinde tüm durumlar için üretilmiştir. M/G/1 kuyruk sistemi için üretilen normal karma dağılımlar, Mahalanobis sayısı 1.5, 2, 2.5 ve 3; M/M/1 kuyruk sistemi için ise üstel karma dağılımların μ_1/μ_2 oranı 1.5, 2, 2.5, 3 olacak şekilde tüm karma oranlarında sistemin durağan durum olması gerektiği dikkate alınarak düzenlemiştir.

Uygulamalarda işlem süresi hakkında hiçbir bilgiye sahip olunmadığı varsayılmıştır. Veriler χ^2 testine göre herhangi bir bilinen teorik saf dağılıma uyup uymadığı test edilmiştir. Bilinen bir teorik saf dağılıma uymadığı durumlarda ampirik dağılım oluşturulmuştur. Benzetim programında oluşturulan ampirik dağılıma uygun sayılar üretilmiştir. χ^2 testi sonucunda test verisinin bilinen bir saf dağılıma uyduğu durumlarda ise bu saf dağılımlar kullanılmıştır. Karma dağılım modeli yaklaşımında ise, işlem sürelerini oluşturduğu kabul edilen test verilerinin karma normal dağılımdan geldiği kabul edilerek BIC değerlerine göre bileşen sayısı tahmini yapılmıştır. EM algoritması ile karma dağılımdaki her bir bileşenin parametre tahmini yapılmıştır. Parametre tahmini yapılan karma dağılım modelinin test verilerini temsil ettiği Mann-Whitney U ile test edilmiştir. Karma normal dağılımlarda oluşan durumlarda ampirik dağılım oluşturulurken 50 kategoriye ayırmak yeterli olurken, dağılımların üstel karma dağılımlardan oluştuğu durumlarda 300 kategoriye ayırmak zorunda kalınmıştır. Bunun sebebi, üstel dağılımın belirli bir aralık içerisine verilerin yığılmasıdır. Üretilen ampirik dağılım ve normal karma dağılım verilerinin ortalama ve standart sapma değerleri hesaplanarak M/G/1 kuyruk sistemine çevrilerek performans kriteri olarak

belirlenen kuyrukta bekleme süresi W_q dakika cinsinden hesaplanmış ve test verileri ile elde edilen teorik sonuçlar ile ampirik fonksiyon ve normal karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen değerler karşılaştırılarak yüzde bağıl hata hesaplanmıştır.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans dönemim boyunca tüm tecrübesini her koşulda aktaran, desteğini hep yanımda hissettiğim çok değerli tez danışmanım Dr.Öğr. Üyesi Melik KOYUNCU' ya ayırdığı değerli zamanları için teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca hem manevi hem de akademik desteğini esirgemeyen saygıdeğer büyüğüm, Prof.Dr. Yusuf ZEREN' e; yüksek lisansa ilk adımı atmam için bana destek olan Dr.Öğr. Üyesi Fikri EGE' ye; bir makine mühendisinin başarılı bir endüstri mühendisi de olabileceği konusunda örnek aldığım Prof.Dr. Ali KOKANGÜL' e, bilgisini bizden esirgemeyen Prof.Dr. Hamza EROL' a, hem akademik hem de hayatımın her alanında yanımda olan dostlarım Arş.Gör. Tuğçe Sena AVŞAR' a ve Arş.Gör. Emine BOZOKLAR' a teşekkür ederim.

Son olarak beni kendi ayakları üzerinde duran bir birey olmamı sağlayan annem Gamze SARAÇ ve babam Şükrü SARAÇ' a, ev arkadaşlarım olan kardeşim Cem SARAÇ' a ve kedilerime sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER SAYFA

ÖZ I
ABSTRACT II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET III
TEŞEKKÜR V
ÇİZELGELER DİZİNİ VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ XII
SİMGELER VE KISALTMALAR XVIII
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 5
3. MATERYAL ve METOD 11
3.1. Rasgele Değişkenler için Temel Tanımlar 11
3.2. Üretim Sistemlerinde En Çok Kullanılan Teorik Dağılımlar 12
3.2.1. Normal Dağılım 13
3.2.2. Üstel Dağılım 14
3.2.3. Erlang Dağılımı 15
3.2.4. Hiperüstel Dağılım 16
3.3. Uygulamalar için Dağılım Seçimi 17
3.3.1. İstatistiksel Önemlilik Testleri 21
3.3.2. Ampirik Dağılım Oluşturma 24
3.4. Kuyruk Teorisi 28
3.4.1. M/M/1 Kuyruk Sistemleri 34
3.4.2. M/Ek/1 Kuyruk Sistemleri 36
3.4.3. M/G/1 Kuyruk Sistemleri 37
3.4.4. G/G/1 Kuyruk Sistemleri 38
3.5. Üretim Sistemlerinde Benzetim Modelleme 39
3.6. Karma Dağılımlar 43
3.6.1. Karma Dağılımlarda Bileşen Sayısı Belirleme 49

3.6.2. Karma Dağılımlarda Parametre Tahmini 64
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA 69
4.1. İşlem Süresinin Normal Karma Dağılım Olduğu Durumlar 70
4.1.1. Mahalanobis Uzaklığının 1.5 Olduğu Durum 71
4.1.2. Mahalanobis Uzaklığının 2 Olduğu Durum 83
4.1.3. Mahalanobis Uzaklığının 2.5 Olduğu Durum 92
4.1.4. Mahalanobis Uzaklığının 3 Olduğu Durum 100
4.2. İşlem Süresinin Üstel Karma Dağılım Olduğu Durumlar 108
4.2.1. $\mu_1/\mu_2 = 1.5$ Olduğu Durum 110
4.2.2. μ_1/μ_2 Olduğu Durum 117
4.2.3. $\mu_1/\mu_2 = 2.5$ Olduğu Durum 123
4.2.4. $\mu_1/\mu_2 = 3$ Olduğu Durum 131
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 137
KAYNAKLAR 141
ÖZGEÇMİŞ 151
EKLER 152

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

Çizelge 3.1. Normal dağılım özellikleri.....13
Çizelge 3.2. Üstel dağılım özellikleri.....15
Çizelge 3.3. Erlang dağılım özellikleri 16
Çizelge 3.4. Hiperüstel dağılım özellikleri 17
Çizelge 3.5. Karma dağılımların oluşturduğu dağılımlar (Ma, 2018).....44
Çizelge 3.6. Normal karma dağılımların BIC ölçütüne göre tahmin edilen bileşen sayıları 61
Çizelge 3.7. Üstel karma dağılımların BIC ölçütüne göre tahmin edilen bileşen sayıları 62
Çizelge 4.1. D = 1.5 olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları.....72
Çizelge 4.2. $D=1.5$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler.....76
Çizelge 4.3. İşlem süresi $D=1.5$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması.....81
Çizelge 4.4. D = 1.5 olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri 81
Çizelge 4.5. $D=2$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları.....84
Çizelge 4.6. $D=2$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler.....87
Çizelge 4.7. İşlem süresi $D=2$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması.....90

Çizelge 4.8. D = 2 olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri 91

Çizelge 4.9. $D = 2.5$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları.....92

Çizelge 4.10. $D = 2.5$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler.....96

Çizelge 4.11. İşlem süresi $D = 2.5$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması.....99

Çizelge 4.12. $D = 2.5$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri 99

Çizelge 4.13. D = 3 olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları.....101

Çizelge 4.14. $D = 3$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler.....103

Çizelge 4.15. İşlem süresi $D = 3$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması.....106

Çizelge 4.16. $D = 3$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri 107

Çizelge 4.17. $\mu_1/\mu_2 = 1.5$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları.....110

Çizelge 4.18. $\mu_1 / \mu_2 = 1.5$ durumu için BIC testi sonucu bulunan k

bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler 112
Çizelge 4.19. İşlem Süresi $\mu_1/\mu_2=1.5$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması.....115
Çizelge 4.20. $\mu_1/\mu_2=1.5$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri 115
Çizelge 4.21. $\mu_1/\mu_2=2$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve χ^2 testi sonuçları.....117
Çizelge 4.22. $\mu_1/\mu_2=2$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler 119
Çizelge 4.23. İşlem Süresi $\mu_1/\mu_2=2$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması.....122
Çizelge 4.24. $\mu_1/\mu_2=2$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri 122
Çizelge 4.25. $\mu_1/\mu_2=2.5$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve χ^2 testi sonuçları.....124

Çizelge 4.26. $\mu_1/\mu_2 = 2.5$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler 126

Çizelge 4.27. İşlem Süresi $\mu_1/\mu_2 = 2.5$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması.....128

Çizelge 4.28. $\mu_1/\mu_2 = 2.5$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri 130

Çizelge 4.29. $\mu_1/\mu_2 = 3$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve χ^2 testi sonuçları.....131

Çizelge 4.30. $\mu_1/\mu_2 = 3$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler 132

Çizelge 4.31. İşlem Süresi $\mu_1/\mu_2 = 3$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması.....135

Çizelge 4.32. $\mu_1/\mu_2 = 3$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri 136

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

Şekil 3.1. Farklı ortalamalara ve standart sapma değerlerine sahip normal dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonları (İnternet Kaynağı, 2018).....14

Şekil 3.2. Girdilerin uygun dağılım belirleme aşamaları 18

Şekil 3.3. c^2 testi kabul bölgesi grafiği (Bircan, Karagöz, & Kasapoğlu, 2003) 23

Şekil 3.4. Bir sistemin benzetim modeline giden çözümlemesi (Law ve Kelton, 2000). 41

Şekil 3.5. Eşit karma oranından ve varyanstan oluşan iki bileşenli normal karma dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu (McLachnan & Peel, 2000). 47

Şekil 3.6. Normal karma dağılım ve Q-Q grafiği arasındaki ilişkiler (Titterington, Smith, & Makov, 1985).....51

Şekil 3.7. Bazı normal karmalara ait şematik olarak Fowlkes grafikleri 52

Şekil 3.8. N~(10,2) dağılımına sahip üretilen 10000 sayının Q-Q ve yoğunluk grafiği.....54

Şekil 3.9. %50'si N~(3,1) ve %50'si N~(6,1) karma dağılımına sahip 10000 sayının Q-Q ve yoğunluk grafiği 55

Şekil 3.10. %40'ı N~(4,1) ve %60'ı N~(7,2) karma dağılımına sahip 10000 sayının Q-Q ve yoğunluk grafiği 57

Şekil 3.11. %20'si N~(3,1), %50'si N~(10,2) ve %30'u N~(20,4) karma dağılımına sahip 10000 sayının Q-Q ve yoğunluk grafiği 58

Şekil 3.12. %20'si N~(3,2), %30'u N~(5,2) ve %50'si N~(10,1) karma dağılımına sahip 10000 sayının Q-Q ve yoğunluk grafiği 59

Şekil 3.13. %30'u EXPO(2.4) ve %70'i EXPO(6) oluşan karma dağılımın sekiz normal dağılım ile temsil edilmesi 62

Şekil 3.14. %60'ı EXPO(2) ve %40 'ı EXPO(6) oluşan karma dağılımı dokuz normal dağılım ile temsil edilmesi 63
Şekil 3.15. %80'i EXPO(3) ve %20'si EXPO(6) oluşan karma dağılımı sekiz normal dağılım ile temsil edilmesi.....63
Şekil 3.16. %50'si EXPO(4) ve %50'si EXPO(6) oluşan karma dağılımı dokuz normal dağılım ile temsil edilmesi 64
Şekil 4.1. İşlem süresinin karma normal dağılım olduğu bir kuyruk sistemi 71
Şekil 4.2. D = 1.5 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 1 74
Şekil 4.3. D = 1.5 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 2 74
Şekil 4.4. D = 1.5 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 3 75
Şekil 4.5. $D=1.5$ durumunda N~(6, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları.....77
Şekil 4.6. $D=1.5$ durumunda N~(9, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları 78
Şekil 4.7. %30'u N~(6,2) ve %70'i N~(9,2) (kırmızı) ve tahmin edilen %26.32'u N~(5.68, 1.87) ve %73.68'i N~(8.93, 2) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları.....79
Şekil 4.8. %10'u N~(6,2) ve %90'ı N~(9,2) (kırmızı) ve tahmin edilen %43.84'ü N~(7.88, 2.35) ve %56.16'sı N~(9.32, 1.89) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları.....80
Şekil 4.9. $D=1.5$ olduğu durumlar için % hata değerleri.....82
Şekil 4.10. D = 2 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 1 85
Şekil 4.11. D = 2 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 2 86
Şekil 4.12. D = 2 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 3 86
Şekil 4.13. $D=2$ durumunda N~(6, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları 88

Şekil 4.14. $D=2$ durumunda N~(10, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları 89
Şekil 4.15. %90'ı N~(6, 2) ve %10'u N~(9, 2) (kırmızı) ve tahmin edilen %79.21'i N~(5.84, 1.95) ve %20.79'u N~(8.57, 2.4) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları..... 89
Şekil 4.16. %60'ı N~(6,2) ve %40'ı N~(10,2) (kırmızı) ve oluşturulan ampirik dağılımın (mavi) yoğunluk fonksiyonları..... 90
Şekil 4.17. $D=2$ olduğu durumlar için % hata değerleri 92
Şekil 4.18. $D=2.5$ olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 1 94
Şekil 4.19. $D=2.5$ olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 2 94
Şekil 4.20. $D=2.5$ olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 3 95
Şekil 4.21. $D=2.5$ durumunda N~(5, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları 97
Şekil 4.22. $D=2.5$ durumunda N~(10, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları 97
Şekil 4.23. %10'u N~(5,2) ve %90'ı N~(10,2) (kırmızı) ve tahmin edilen %9.43'u N~(4.78, 2.02) ve %90.57'si N~(9.98, 2.03) (mavi) karma dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları..... 98
Şekil 4.24. %60'ı N~(5,2) ve %40'ı N~(10,2) (kırmızı) ve ampirik dağılımlarının (mavi) yoğunluk fonksiyonları..... 98
Şekil 4.25. $D=2.5$ olduğu durumlar için % hata değerleri 100
Şekil 4.26. $D=3$ olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 1 101
Şekil 4.27. $D=3$ olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 2 102
Şekil 4.28. $D=3$ olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 3 102
Şekil 4.29. $D=3$ durumunda N~(6, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları 104
Şekil 4.30. $D=3$ durumunda N~(12, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları 104

Şekil 4.31. %10'u N~(6,2) ve %90'ı N~(12,2) (kırmızı) ile tahmin edilen %9.67'si N~(5.82, 2.03) ve %90.33'ü N~(11.98, 2.03) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları.....105
Şekil 4.32. %50'si N~(6,2) ve %50'si N~(12,2) (kırmızı) ile oluşturulan ampirik dağılımın (mavi) yoğunluk fonksiyonları.....105
Şekil 4.33. $D=3$ olduğu durumlar için % hata değerleri 107
Şekil 4.34. İşlem süresinin karma üstel dağılım olduğu bir kuyruk sistemi 109
Şekil 4. 35. $\mu_1/\mu_2=1.5$ olduğu her bir durum için yoğunluk fonksiyonları 111
Şekil 4.36. %50'si EXPO(4) ve %50'si EXPO(6) (kırmızı) ile tahmin edilen ampirik (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları.....114
Şekil 4.37. $\mu_1/\mu_2=1.5$ olduğu durumlar için % hata değerleri.....116
Şekil 4.38. $\mu_1/\mu_2=2$ olduğu her bir durum için yoğunluk fonksiyonları 118
Şekil 4.39. %20 'si EXPO(3) ve %80'i EXPO(6) (kırmızı) ile tahmin edilen yedi normal dağılımdan oluşan karma (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları.....121
Şekil 4.40. %30'u EXPO(3) ve %70'i EXPO(6) (kırmızı) ile oluşturulan ampirik (mavi) dağılımın yoğunluk fonksiyonları.....121
Şekil 4.41. $\mu_1/\mu_2=2$ olduğu durumlar için % hata değerleri 123
Şekil 4.42. $\mu_1/\mu_2=2.5$ olduğu her bir durum için yoğunluk fonksiyonları 125
Şekil 4.43. %10'u EXPO(2.4) ve %90'ı EXPO(6) (kırmızı) ile GAMMA(6.05,0.937) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları 129
Şekil 4.44. %60'ı EXPO(2.4) ve %40'ı EXPO(6) (kırmızı) ile yedi normal dağılımdan oluşan karma (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları 129

Şekil 4.45. $\mu_1/\mu_2=2.5$ olduğu durumlar için % hata değerleri 130

Şekil 4.46. $\mu_1/\mu_2=3$ olduğu her bir durum için yoğunluk fonksiyonları.....132

Şekil 4.47. %70'i EXPO(2) ve %30'u EXPO(6) (kırmızı) ve dokuz normal dağılımdan oluşan karma (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları 134

Şekil 4.48. %10'u EXPO(2) ve %90'ı EXPO(6) (kırmızı) ile GAMMA(6.108,0.922) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları 134

Şekil 4.49. $\mu_1/\mu_2=3$ olduğu durumlar için % hata değerleri 136

SİMGELER VE KISALTMALAR

X	: Rasgele değişken
μ	: Aritmetik Ortalama
σ^2	: Varyans
P-P Grafiği	: Olasılık – Olasılık Grafiği
Q-Q Grafiği	: Nicelik – Nicelik Grafiği
BIC	: Bayesci Bilgi Kriteri
AIC	: Akaike Bilgi Kriteri
EM Algoritması	: Beklenti Maksimizasyon Algoritması
D	: Mahalanobis Uzaklığı
k	: Karma dağılımı oluşturan bileşen sayısı
MLE	: En çok olabilirlik yöntemi

1. GİRİŞ

İlk olarak 1894 yılında Karl Pearson tarafından uygulanan karma dağılımlar, tek bir saf dağılım ile veriler temsil edilemediğinde kullanılabilir. Karma dağılımlar, Weldon'un 1892 yılında elindeki 1000 yengecin alın genişliklerinin boy uzunluğuna oranı verileri tek değişkenli normal dağılım kullanarak incelediğinde oluşan histogram grafiğindeki asimetrik durumun iki yeni alt tür nedeniyle oluşabileceğini düşünmesiyle ve matematiksel yöntem için Pearson' dan yardım istemesiyle başlar. Biyolojik problemlerde temel istatistiksel analiz olarak görülen Pearson' ın 1894 yılında yaptığı bu çalışmada alın genişlikleri ve boy uzunlukları iki farklı dağılım olarak düşünülerek, bu fonksiyonları μ_1 ve μ_2 ortalamalı, σ_1^2 ve σ_2^2 varyanslı, p_1 ve p_2 karma oranlı iki normal olasılık yoğunluk fonksiyonu karması şeklinde tanımlamıştır (McLachnan ve Peel, 2000). Sonlu karma dağılımların bileşen sayılarını belirleyen parametreleri, karma oranları ve bileşen dağılım parametreleri olmak üzere üç parametresi mevcuttur. Bu parametreleri belirleyebilmek için çeşitli istatistiksel tahmin yöntemleri kullanılması gerekmektedir.

Çalışmanın temelini kuyruk teorisinde karma dağılımların kullanılması fikri oluşturmuştur. Kuyruk modellerinde pek çok stokastik durum mevcuttur ve sistemin analitiksel olarak doğru çözümü bu durumların istatistiksel olarak doğru temsil edilebilmesine bağlıdır. Bu sebeple stokastik ortamlarda işletmelerin yaşamlarını sürdürebilmeleri için, planlı ve sistemli olmaları gerekmektedir. Deterministik ortamlarda analizleri yapmak oldukça kolaydır. Bir takım matematiksel formüllerle ifade edilen eşitlikler bu formülde yer alan her bir değişkenin değeri bilindiği için rahat bir şekilde kullanılabilmektedir. Bu sebeple matematiksel olarak ifade edilemeyen karmaşık yapıdaki bir stokastik sistemi çözümleyebilmek için Benzetim modellerinden yararlanmak gereklidir (Halaç, 1991). Uygulamada analiz edilmesi gereken sistemler bir ya da birden fazla

rassallık kaynağına sahiptirler. Örneğin bir acil servis sisteminde; hastaların gelişler arası süresi, hangi bölüme geldikleri, hastanede kalma süresi tamamen rassaldır. Haberleşme alanında; bir telefon görüşmesinin uzunluğu, bir sonraki mesajın geliş süresi ya da gelecek olan mesajın uzunluğu ya da bir banka sisteminde; müşterilerin gelişler arası süreleri, sistemde kalma süreleri yine rassallık gösterir. Fakat bu sistemlerin tanımlanması ve bir takım karar destek sistemlerinin kurulması için; örneğin acil serviste kaç doktorun hazır beklemesi gerektiği ya da bankada kaç veznenin açık olması gerektiği, hangi vezne prensibinin uygulanması gerektiği gibi; bu rassallıkların yönetilmesi gerekmektedir.

Sistemin matematiksel olarak analiz edilebilmesi için işlem zamanları, makine çalışma zamanları, müşterilerin gelişler arası süresi, makine tamiri gibi girdiler rassallık gösteren girdilerin olasılık dağılımlarının belirlenmesi gerekir. Bir makinede çalışan iki farklı işçi ya da bilinmeyen bir kaynaktan farklı dağılımlarda gelişler arası süreler mevcut olabilir ve bu tarz verilerin bilinen hiçbir dağılıma uymadığı durumlarda veri setinin karma dağılım şekilde oluşmuş olma ihtimali düşünülmelidir.

Sistem, matematiksel olarak ne kadar doğru temsil edilirse, teorik olarak hesaplanacak olan performans çıktıları gerçek duruma o kadar yaklaşır. Bu sebeple veri setlerinin iyi analiz edilmesi gerekmektedir. Elde edilen performans çıktıları sistemi iyileştirmede ve yorumlamada önemli roller oynar. Örneğin kuyrukta ortalama bekleme sürelerine ya da hizmet noktalarının yoğunluk değerlerine göre, ek hizmet noktası açılıp açılmaması gerekliliği; kuyrukta bekleyen ortalama ürün sayısına göre kurulması gereken stok alanı gibi problemler çözülebilir.

Bu çalışmada kuyruk teorisi, normal karma dağılımlar yaklaşımı ile incelenerek performansı değerlendirilmiştir. Analizde işlem süresi veri setleri, normal karma dağılımlardan ve üstel karma dağılımlardan benzetim programında sistematik bir şekilde üretilmiştir. İşlem süresi için üretilen sayılar c^2 uygunluk

testi ile bilinen herhangi bir saf dağılıma uyup uyumadığı test edilmiştir. İşlem süresi parametreleri bilinen hiçbir teorik dağılıma uymadığı durumlarda ampirik dağılım oluşturulmuş ve bu dağılımla üretilen sayılar, kullanılan veri setini temsil edip etmediği Mann-Whitney U testi ile test edilmiştir. Herhangi bir saf dağılıma uymayan durumlarda ampirik dağılım oluşturulduktan sonra normal karma dağılım yaklaşımı ile kuyrukta bekleme süresi hesaplanmak istenmiştir. Bunun için öncelikle veri setinin normal karma dağılımlardan oluştuğu kabulü yapılmıştır. BIC değerine bakılarak bileşen sayısı tahmini yapılmıştır. Tahmin edilen bileşen sayısına göre EM algoritması çalıştırılarak her bir bileşenin standart sapma, ortalama ve karma yüzdeleri tahmin edilmiştir. Ampirik dağılım ve normal karma dağılım yaklaşımları ile elde edilen sonuçlar teorik sonuçlar karşılaştırılarak performans analizi yapılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Son yüzyıldan bu yana verileri işleme ve anlama konusunda istatistiksel anlamda pek çok çalışmalar yapılmaktadır. Ronald A. Fisher, Karl Pearson ve Jerz Neyman'ın çalışmaları bu disiplinin gelişmesinde önemli rol oynamıştır. Özellikle rasgeleliğin bulunduğu alanlarda, istatistiksel olarak sistemi tanıyabilmek karar mekanizmaları için oldukça önemlidir (Shaughnessy ve Pfannkuch, 2002). Analitiksel çözümler yaygınlaşmaya başladıkça karma dağılımlar ekonomi, ziraat, botanik, tıp, su ürünleri, psikoloji, biyoloji, zooloji gibi pek çok alanda kullanılmaya başlanmıştır (Titterington ve ark., 1985).

1890'lı yılların sonunda Weldon'un verileriyle Pearson yaptığı çalışmada cinsiyete göre yengeçlerin alın hacimleri ve karides diş uzunluklarıyla normal karma dağılımlarda momentler yöntemini kullanarak tahmin etmiştir. Ardından parazit türlerine göre uzunlukları normal karma dağılım olarak kabul ederek momentler yöntemini kullanarak tahmin etmesiyle devam etmiştir çalışmalardan sonra karma dağılımlara karşı olan ilgi hızla artmaya başlamıştır. Araştırmacılar uzun yıllar karma dağılımların yapısı hakkında bilgi sahibi olmaya çalışmış, zaman geçtikçe çeşitli alanlarda uygulamaya başlamıştır.

Karma dağılımlar konusunda yapılan çalışmalar en yaygın olarak hakkında çok geniş bilgi sahibi olunması sebebiyle normal dağılım bileşenlerine sahip olan sonlu karma dağılımlar konusundadır. Pek çok araştırmacı karma dağılım parametrelerini farklı şekillerde tahmin etmeye çalışmıştır. Bir çalışmada tek boyutta üç bileşenli normal karma dağılımın parametreleri momentler yöntemiyle tahmin edilmeye çalışılmıştır (Pollard, 1934). Daha sonra iki normal karma dağılımın varyansları eşit kabul edilerek en çok olabilirlik yöntemi geliştirilerek parametre tahmini yapılmıştır (Rao, 1948). Günlük yaşamdaki rasgelelikler inceledikçe, karma dağılım yaklaşımının sağlıklı bir şekilde çalıştığı görülmüştür. Örneğin, Penn State'te kızlar ve erkeklerden oluşan bir grup öğrencinin

uzunluklarının incelendiği çalışmada, uzunluklarının oluşturduğu dağılımın normal karma dağılıma uyduğu görülmüştür (Joiner, 1975).

Karma dağılımlar ile ilgili en önemli çalışmalardan biri olan EM algoritmasının ortaya çıkışı, bu algoritmaya bağlı olarak en çok olabilirlik yöntemine analitik yaklaşım açısı geliştirmiştir (Dempste ve ark., 1977). Bu çalışma sonucunda karma dağılımların en çok olabilirlik tahmine dayalı analitik çözümlenmesi pek çok grup tarafından ilgi ile karşılanmıştır ve EM algoritması karma modellerin parametre tahmininde sıkça kullanılmaya başlanmıştır. 1980'li yıllara kadar bu iki metot ile çalışırken, bilgisayarların yaygınlaşıp gelişmesiyle çeşitli algoritmalar geliştirilerek tahmin etme yöntemleri geliştirilmeye çalışılmıştır. (Redner ve Walker, 1984). Örneğin tek değişkenli karma normal dağılımın parametreleri en çok olabilirlik ve bulanık c ortalamaları yöntemleriyle tahmin edilip sonuçları karşılaştırılmıştır, bulanık c ortalaması yöntemi daha hızlı olmasına rağmen iyi karıştırılmış dağılımlarda en çok olabilirlik yöntemi daha iyi sonuçlar vermiştir (Davenport, Bezdek ve Hathaway, 1988).

Çalışmalar genişledikçe karma dağılımlar çeşitli alanlara uygulanarak istatistiksel tanımlamalar ve karar destek sistemleri oluşturulmaya başlanmıştır.

Karma dağılımlar biyoloji ve zooloji alanında sıkça kullanılmıştır. Başlangıçta analitiksel yöntemlerden çok grafiksel yöntemler kullanılmıştır. Örneğin bir çalışmada balıkların yaşa göre uzunlukları grafiksel olarak normal karma dağılım ile tahmin edilmeye çalışılmıştır (Cassie, 1954). Analitiksel yöntemler geliştikçe karma dağılım parametre tahmin yöntemleri de değişmiştir. Balık türleri uzunlukları dağılımı incelenerek normal dağılımlı yaş kategorilerine bölünerek karma dağılım modeli oluşturulmuştur (Bhattacharya, 1967). Bir başka çalışmada farelerin DNA'sı incelenerek elde edilen veriler normal karma dağılım şeklinde tanımlanmıştır (Gregor, 1969). Yaş faktörüne göre balıkların boy uzunluğu minimum uzaklık ve en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilmeye çalışılmıştır (Dick ve Bowden, 1973). Farklı yaşlardaki kediler ele alınarak, lif kökü dağılımlarının normal karma dağılım yaklaşımıyla tahmin yöntemleri

kıyaslanmıştır (Everitt, 1987). Yapılan çalışmalardan bir diğerinde, cinsiyete bağlı olarak pisi balığı boyları en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak elde edilmeye çalışılmıştır (Erol, 1995).

Karma dağılımlar tıp alanında da kendine çok geniş yer bulmuştur. Yapılan bir çalışmada, sağlıklı bir insanın kanında bulunan seçilmiş proteinin değişim aralığının dağılımı normal karma dağılım olarak modellenmiştir (Erol ve Akdeniz, 1997). Bir çalışmada, uygulanan tedavilerde başarısız olan hastaların olasılığını bulabilmek için normal karma dağılım model kullanılmıştır (Pavlic ve ark., 2001). Yapılan bir başka çalışmada hastalık bulaşma riskini tanımlamak için üç bileşenden oluşan normal karma dağılım modeli oluşturulmuş ve bu normal dağılımların bileşen parametreleri EM algoritmasıyla tahmin edilmeye çalışılmıştır (Savanur ve ark., 2002).

Tarım alanında farklı mısır türleri normal karma dağılım modeli ile tanımlanarak parametreleri momentler ve en çok olabilirlik yöntemi ile tanımlanmaya çalışılmıştır (Tan ve Chang, 1972). Bu alanda bir başka çalışmada ise, tarladaki ürün yoğunluğu karma model ile tanımlanarak en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır (Peters ve Coberly, 1976). Tarım arazisinde üç farklı bant üzerindeki spektral parlaklık değeri için üç bileşenli normal karma dağılım modeli kurulmuş ve parametreler momentler yöntemi ile tahmin edilmeye çalışılmıştır (Erol ve Akdeniz, 1995).

Ekonomi alanında da karma dağılımlar uygulanmıştır. Örneğin, toptan fiyatların tüketici fiyatları değişim oranı normal karma dağılım kullanılarak modellenmeye çalışılmıştır (Erol ve ark., 1997). İşsizlik sürelerini tanımlayabilmek için üstel karma dağılım modeli uygulanmaya çalışılmıştır (Mosler ve Seidel, 2001).

Doğa olaylarındaki rasgelelik sebebiyle, bu alanda karar verme mekanizmaları sağlıklı işlemediği için, olayların modellemesinde karma dağılımlardan yardım alınmıştır. Bir volkanın patlamaları arasındaki süreler

ölçülmüş ve bir sonraki patlama zamanı karma normal dağılım modeli oluşturularak tahmin edilmeye çalışılmıştır (Shaughnessy ve Pfannkuch, 2002).

Endüstride karma modeller, sistemi daha iyi tanımlayabilmek ve karar destek mekanizmasını daha sağlıklı oluşturabilmek adına kullanılmıştır. Stok planlamada yapılan pek çok çalışmada tedarik süresince gelen talep normal kabul edilir fakat bu modellemenin gerçeği yansıtmadığı ortaya konulmuştur (Ouyang ve Wu, 1998). Bu sebeple; yapılan bir çalışmada, teslim süresi ve sipariş miktarını belirleyebilmek için oluşturulmak istenen modelde, stoksuzluk periyodu süresince geri siparişler ve kayıp satışlar normal karma dağılım bileşenleri olarak kabul edilmiştir (Wu ve Tsai, 2001). Yapılan bir diğer çalışmada; temin süresi esnasında farklı müşterilerden gelen talebin tanımlanamadığı kabul edilerek, kayıp satış ücretlerin karma dağılımlı olan kusurlu ürünler dikkate alınarak düşürülmesi ele alınmıştır. Burada kusurlu ürünler tam ve kısmi karma normal dağılım olarak iki model şekilde kurulmuştur. Yapılan analiz sonucunda, en uygun sipariş miktarı, tekrar sipariş noktaları, kayıp oranları, temin süreleri simüle edilebilir. Karma modeller karar verme açısından daha verimli olduğu için; gerçek sistemi daha çok yansıttığı kabul edilir (Lin, 2013). Yapılan bir diğer çalışmada teslim süresi esnasında karma dağılıma uyan talebin belirlenmesi çalışmasında; verilen servis değeri için stoğun talep noktasının, beklenen stok değerini minimum yapan sipariş miktarını hesaplanabilmiştir. Karma dağılım yaklaşımıyla, birim zamandaki talep ve temin zamanı duruma bağlı şekilde düzenlenebilir. Fakat karma dağılım olarak kabul edilen durumlar en iyi şekilde; eğer birim zamandaki talebin toplamının dağılımı normal, üstel, gamma gibi standart formlarda olduğu bilindiğinde çalışır (Cobb, 2013). Yapılan bir başka çalışmada, heterojen her bir kümenin bir küme olabileceği temeline dayanarak, veri setini oluşturan küme sayısı ve yapısı hakkında önbilgi sahibi olunmadan küme yapısının belirlenmesi problemi üzerinde çalışılmıştır. Heterojen verileri parçalayarak elde ettiği küme parametrelerini en çok olabilirlik yöntemine dayanan EM algoritması ile tahmin etmiştir. Aynı zamanda Bayesci bilgi kriterinden de (BIC) yardım alarak küme sayılarını gerçeğe

en yakın şekilde tahmin etmeye çalışmıştır (Fraley ve Raftery, 1998). Bir başka çalışmada bileşen sayısının bilindiği durumlarda Newton-Raphson ve EM algoritması tahmin etme yöntemleri karşılaştırılmış ve EM algoritması hata kareler ortalamasına göre diğer yönteme daha iyi sonuç verdiği görülmüştür (Açıkgöz, 2007). Karma dağılımların doğası gereği, bazı durumlarda olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyon şartlarının sağlanamaması, parametrelerin sınır kümelerinde bulunması sebebiyle parametre tahmini yapılamaması hala çözülememiş bir problemdir.

3. MATERYAL VE METOD

3.1. Rasgele Değişkenler için Temel Tanımlar

Bir rasgele değişkenin karakteristikleri, olasılık kütle ya da yoğunluk fonksiyonun şekli ve parametreleri biliniyorsa tanımlanabilir. Bir rasgele değişken kümesinin olasılıksal olarak tanımlanabilmesi için merkezsel değerleri ve dağılım ölçüleri en önemli temel büyüklükleridir. Bir rasgele değişken kümesinin parametreleri, dağılım fonksiyonunun belli özelliklerini yansıtan büyüklüklere denir ve bu parametre değerleri mühendislik problemlerinin çözülebilmesi için bilinmesi şart olan değerlerdir. Parametre değerleri bilinen bir dağılımın, hangi değerler etrafında kümelendiği, çarpıklığı ya da sivriliği hakkında bilgi sahibi olunabilir. Parametreler pek çok şekilde tanımlanabilir. En popüler olarak kullanılan parametre türü ortalama değer ve varyans değeridir (Yağcı, 2017).

Ortalama değer, bir rasgele değişken kümesinin merkezsel değeri hakkında bilgi veren parametre olarak tanımlanabilir. Beklenen değer olarak da adlandırılabilir ve $E(X)$ ya da μ_x olarak gösterilir.

X, olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olan bir sürekli bir rasgele değişken ise;

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{3.1}$$

Kesikli bir rasgele değişken ise, olasılık kütle fonksiyonu $p(x_i)$ olmak üzere (3.2) denklemi ile ifade edilir.

$$E(X) = \mu_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i) \tag{3.2}$$

En önemli parametrelerden bir diğeri ise dağılımın değişkenliği olan varyans değeridir. Varyans değeri, dağılımın ne ölçüde kümelendiği hakkında bilgi veren bir parametredir ve ortalama değere göre karesel sapmaların ağırlıklı ortalaması olarak hesaplanır.

X sürekli rasgele değişken ise,

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx \tag{3.3}$$

X kesikli rasgele değişken ise,

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2 p(x_i) \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımlamalara göre varyans; (3.5) olarak genel formunda yazılabilir

$$Var(X) = E((X - \mu_x)^2) \tag{3.5}$$

Varyansın karekök değeri ise standart sapma değeri σ 'yı verir.

$$\sigma = \sqrt{(Var(X))} \tag{3.6}$$

3.2. Üretim Sistemlerinde En Çok Kullanılan Teorik Dağılımlar

Kuyruk teorisinde en çok kullanılan dağılımlar ele alınmıştır. Bunlar; normal dağılım, üstel dağılım, erlang dağılımı ve hiperüstel dağılımlardır (Adan ve Resing, 2015).

3.2.1. Normal Dağılım

Normal dağılım, tüm olasılık ve istatistik dağılımlarının arasında en çok kullanılandır. "Gauss" dağılımı olarak da bilinen normal dağılımın grafiğine normal eğri denir ve bu dağılımın kullanış açısından uygun matematiksel özellikleri mevcuttur (Altıparmak, 2017). Evrendeki pek çok olay normal dağılıma uygunluk gösterdiği için yapılan araştırmalardan elde edilen verilerin değerlendirilmesinde çok yaygın olarak kullanılmaktadır (Gül, 2016). Merkezi limit teoremine göre, gözlem sayısı yeterince büyük ise, n adet bağımsız rasgele değişkenler normal dağılıma uyma eğilimi gösterir ve normal dağılımı kullanışlı kılan nokta burasıdır (Başol, 2013). Çünkü alınan bir veri kümesi normal dağılıma uymuyorsa bile bu dağılımdan alınacak olan örneklemlerin ortalamalarının dağılımları merkezi limit teoremine göre normal dağılıma yaklaşacaktır (Gürsakal, 2013).

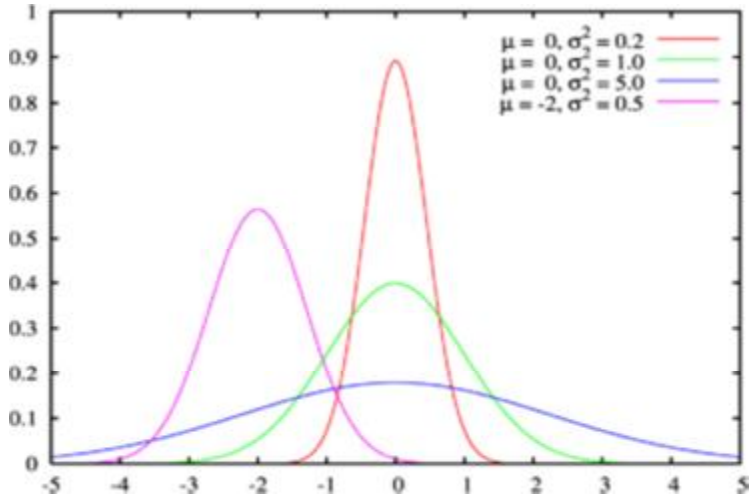
Çizelge 3.1. Normal dağılım özellikleri

Gösterim	$X : N(\mu, \sigma^2)$
Parametreleri	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})}$
Ortalama	μ
Varyans	σ^2
Değişim Katsayısı	σ/μ
Çarpıklık	0

Normal dağılımlarda X rasgele sürekli değişkeni $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanmıştır.

$$f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{3.7}$$

Ortalama ve standart sapma değerlerine bağlı olarak normal dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonunun şekli değişir. Normal dağılım, $m=0$ ve $s=1$ olduğu zaman standart normal dağılım olarak adlandırılır.



Şekil 3.1. Farklı ortalamalara ve standart sapma değerlerine sahip normal dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonları (İnternet Kaynağı, 2018).

3.2.2. Üstel Dağılım

Üstel dağılım geçmişi unutma özelliği sebebiyle kuyruk modellerinde sıkça kullanılan bir dağılım çeşididir. Geçmişi unutma özelliği ise; bir kuyruk sistemine gelen müşterinin h birim kadar bekleme olasılığı bir önceki müşterinin ne kadar beklediğine bağlı olmadığı şeklinde yorumlanabilir.

Çizelge 3.2. Üstel dağılım özellikleri

Gösterim	$X \sim \exp(1/\lambda)$
Parametreleri	$\lambda > 0$
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	$\lambda e^{-\lambda x}$
Kümülatif Yoğunluk Fonksiyonu	$1 - e^{-\lambda x}$
Ortalama	$1/\lambda$
Varyans	$1/\lambda^2$
Değişim Katsayısı	1
Çarpıklık	2

Bir kuyruk sisteminde, müşteri varışlarının genellikle rasgele olduğu kabul edilir ve bu sebeple gelişler arası süreleri tanımlamak için üstel dağılım kullanılır (Köksal, 1980). t zamanı içerisinde geliş hızı λ parametreli üstel bir dağılımsa, geliş sayısı λt parametreli bir Poisson dağılımıdır.

3.2.3. Erlang Dağılımı

k adet birbirine eşit $1/\lambda$ ortalamasına sahip, bağımsız üstel dağılıma uyan rasgele değişkenlerin toplamı Erlang dağılımına sahiptir (Adan ve Resing, 2001). Kuyruk teorisinde Erlang dağılımı k sayıdaki olayın tümünün ortaya çıkmasına kadar olan zaman ile ilgilenir. Erlang dağılımı, şekil parametresi tam değer olan gamma dağılımının özel bir halidir.

Çizelge 3.3. Erlang dağılım özellikleri

Gösterim	$X \sim E(k,\lambda)$
Parametreleri	$k \in \mathbb{N}, \quad \lambda > 0$
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$
Kümülatif Yoğunluk Fonksiyonu	$1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} e^{-\lambda x} (\lambda x)^n$
Ortalama	k/λ
Varyans	k/λ^2
Değişim Katsayısı	$1/\sqrt{k}$
Çarpıklık	$2/\sqrt{k}$

Erlang dağılımında şekil parametresi $k = 1$ ise üstel dağılıma dönüşür. Bu dağılım Erlang tarafından, telefon santralinde aynı anda yapılabilecek telefon görüşmeleri sayısını inceleyebilmek için geliştirilmiştir (Erlang, 1909). Erlang dağılımı günümüzde de telefon trafiği mühendisliğinde bekleme süreleri, stokastik süreçler, biyomatematik alanlarında ve işletmelerde satın almalar arasındaki süreleri tanımlamak için sıkça kullanılmaktadır (Chatfield ve Goodhardt, 1973).

3.2.4. Hiperüstel Dağılım

$X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız rasgele değişkenler üstel dağılıma uyuyorsa ve her bir üstel dağılımın ortalama değeri farklıysa bu değişkenlerin toplamı $X_1 + X_2 + ... + X_n$ hiperüstel dağılım ailesindendir. Hiperüstel dağılımda bahsedilen toplam, aritmetik olarak bir toplam değil, karma dağılım ailesine temsil eden toplam sembolüdür yani her bir üstel dağılım ailesi farklı oranlardan $p_1, p_2, ..., p_n$ oluşur ve bu oranların toplamı 1'e eşit olur. Bir diğer deyişle

hiperüstel dağılım, bağımsız üstel dağılımların karması bir dağılımdır. Erlang dağılımı, hiperüstel dağılımın özel bir durumudur (Papadopolous ve ark., 1993).

Çizelge 3.4. Hiperüstel dağılım özellikleri

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	$\sum_{i=1}^{n} f_{X_i}(x)p_i$
Ortalama	$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{l_i}$
Varyans	$\sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{2}{l_i^2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{l_i}\right)^2$
Değişim Katsayısı	$c>1$

3.3. Uygulamalar için Dağılım Seçimi

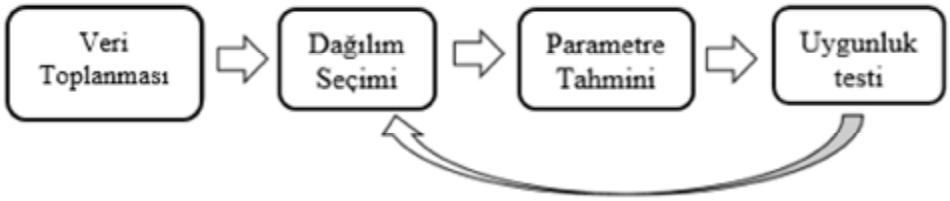
Geliştirilen benzetim modelleri deterministik olarak değil, olasılıksal olarak durumu açıklamaya çalışır (Yavuz, 2008). Bu sebeple mevcut veri setinin istatistiksel olarak doğru belirlenebilmesi analitik sonuç için büyük önem arz etmektedir. Uygulamalarda dağılım doğru seçilemezse, bu girdiler üzerine kurulacak olan parametreler ve hipotez testleri de yanlış olacağından, sistem tümüyle anlaşılmaz bir hal alabilir (Gürsakal, 2013).

Bir girdide dağılımın belirlenebilmesi için, ilk adım olarak bilinen dağılımlardan birinin seçilmesi gerekmektedir. Sonrasında bu dağılımın parametrelerinin belirlenip uygunluğu test edilmelidir.

Benzetim modellerinde kullanılan girdiler parametreleri bilinen bir dağılıma uygun olduğunda kullanılır. Bazı durumlarda bu veri seti bilinen hiçbir dağılıma uymaz ve ampirik bir dağılım yardımıyla benzetim modeli kurulması gerekir. Benzetim modeli için belirlenmesi için gereken girdi parametreleri gelişler arası süreler ya da işlem zamanlarıdır. Bu noktada, veri setinin karma

dağılımlardan gelebileceği ihtimali düşünülerek analiz yapılması bu çalışmanın temelini oluşturmaktadır.

Girdiler için uygun dağılımın belirlenmesi ve benzetim modelinin doğru çalışabilmesi için en önemli aşamalardan birisidir. Girdi dağılımların belirlenmesinde 4 adım mevcuttur.



Şekil 3.2. Girdilerin uygun dağılım belirleme aşamaları

İlk adımda veriler toplanır. Veri toplamada dikkat edilmesi gereken bir takım kurallar mevcuttur. Sistemin önceden gözlemlenip hangi verilerin gerekli olduğuna, hangi zamanda toplanacağına karar verilmesi gerekmektedir. Örneğin mevsimsellik içeren bir sistem söz konusuysa, 12 ay boyuncu verilerin belirli bir sistematikte toplanması gerekir ve sistem için karar verilmesinde önemli parametreler belirlenip, bu veriler üzerinde çalışılması gerekir. Bir banka sisteminde müşterinin sistemde kalış süresi incelenmek istiyorsa; müşterilerin cinsiyeti ya da yaşı bu analiz için gerekli olmayacaktır. Ayrıca bir diğer önemli durum ise, örneklem sayısı arttıkça dağılım seçiminin doğruluğu da arttığı için yeterli verinin toplanması gerekliliğidir. Toplanan veriler sistemi homojen olarak temsil etmelidir. Veriler toplanırken özel bir durum oluşmuşsa bunlar not edilmelidir. Örneğin üretim hattındaki bir makinenin işlem süresi not edilirken bir vardiya değişimi olursa, işlem sürelerinde farklılıklar oluşabilir.

İkinci adım olarak dağılım ailesinin belirlenmesi gerekmektedir. Bunlardan ilki nokta istatistikleri, diğeri ise histogramlardır.

Nokta istatistiklerinde ortalama, medyan ve varyanslar; değişim katsayısı ya da çarpıklık katsayılarından yararlanarak tahminler yapılabilir. İlk olarak

ortalama, medyan ve varyans yöntemi ele alınacak olursa, bu yöntemde bazı özel dağılımların özel istatistik değerlerine sahip olduğu prensibinden yararlanılır. Bu değerler verilerden elde edilir ve teorik dağılımın nokta değerleriyle karşılaştırılır.

Bu değerlerin hesaplanması için aritmetik ortalama, varyans, mod ve medyan değerlerinden yardım alınır. Ortalaması m ve s^2 varyanslı bir normal dağılımda medyan değeri m ve medyan değerine eşit olur. Eğer ortalama değeri medyan değerinden büyükse grafik sağa, eğer ortalama değer medyandan küçükse grafik sola çarpık olacaktır. Olasılık yoğunluk histogramı çizilerek verilerin bilinen bir olasılık dağılımına benzerliği tespit edilmeye çalışılır.

İkinci yöntem olarak değişim katsayısı ve Lexis oranlarından yararlanarak sürekli dağılımlar için bir takım bilgi sahibi olunabilir. Değişim katsayısı s/m formülüyle hesaplanan sürekli dağılımlar için birimsiz bir değişkenlik ölçüsüdür. Değişim katsayısı 1'e yaklaşıkça veri setinin üstel dağılım ailesinden olduğu yorumu yapılabilir. Değişim katsayısı 1'den büyükse, veri seti sonlu üstel karma dağılım yani hiperüstel dağılıma uyup uymadığı test edilmelidir (Sommereder, 2011).

Dağılım ailesini seçme aşamasında kullanılan son yöntem ise çarpıklık ve basıklık katsayısı değeridir.

Çarpıklık katsayısı bir dağılımın simetrikliği hakkında bilgi verir ve a^3 ile ifade edilir. $a^3 = E\left[(x-m)^3\right]/\left(s^2\right)^{3/2}$ şeklinde hesaplanır. a^3 değeri 0 ise dağılım simetriktir ve normal dağılıma uyar. $a^3<0$ ise dağılım sola, $a^3>0$ ise sağa çarpıktır. $a^3=2$ olduğu durumlarda veri seti üstel dağılıma uyuyor denilebilir.

Dağılım ailesini belirlemede kullanılan bir diğer yöntem ise histogramdan yararlanmaktır. Histogramlar veri setinin olasılık dağılımı için iyi ipucu verilen grafiklerdir. Veri setinden elde edilen histogramlar, bilinen teorik dağılımların yoğunluk fonksiyonları ile karşılaştırılarak tahminler yapılmaya çalışılır.

Histogram çiziminde aralık genişliklerin belirlenmesi gerekmektedir. Veri setindeki gözlemler $x_1, x_2, ..., x_n$ olsun. Açıklık eşit k aralıklarına bölünmelidir.

Bir aralığın genişliği Δb ise, aralıklar $[b_0, b_1], [b_1, b_2], ..., [b_{k-1}, b_k]$ şeklinde ilerler. Genel olarak aralık genişliği, $\Delta b = \left(b_j - b_{j-1}\right)$ olarak ifade edilir. Aralık genişliğinin belirlenmesi veri setinin hangi dağılımdan geldiğini tahmin edilebilmesi için önemli bir aşamadır. Aralık sayısı belirlendiği zaman, aralık genişliği olan Δb, [en büyük değer] – [en küçük değer] / aralık sayısı, şeklinde hesaplanır.

Aralık sayısı birçok kaynakta farklı şekillerde belirlenmiştir. Montgomery'e göre aralık sayısı n gözlem sayısı için, $\sqrt{n}$ olarak hesaplanır (Montgomery, 2009). Blank'e göreyse, gözlem sayısı $n > 50$ ise aralık sayısı 10-20, $n \leq 50$ ise 6-10 arasında belirlenebilir (Blank, 1968).

Üçüncü adım olarak yapılan dağılım tespitine göre bu dağılıma uygun parametre tahmininin yapılması gerekmektedir. Parametre tahmini mevcut veri setinin nümerik bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir ve kullanılan çeşitli yöntemler mevcuttur. Bunlar en çok olabilirlik yöntemi, en küçük kareler ve moment metodudur.

Son adımda parametre tahmini yapılmış olasılık dağılımının uyum iyiliği testleri yapılır. Uyum iyiliği testleri n tane örneklemin belirtilen dağılımdan gelip gelmediğini tespit etmeye çalışır ve verilerin varsayım yapılmış dağılım ile karşılaştırarak bir ölçü birimi yardımıyla kıyaslar. Uyum iyiliği testleri χ^2 ile ilişkili olanlar, deneysel dağılım ile ilişkili olanlar, korelasyon tabanlı olanlar ve moment üreten fonksiyona sahip olanlar olmak üzere dört grupta sınıflandırılır. En yaygın kullanılan uyum iyiliği testleri χ^2 testi ve deneysel dağılım ile ilişkili gruba ait olan Kolmogorov-Smirnov testleridir. Bu uyum iyiliği testleri için oluşturulan hipotezler,

H_0 hipotezi: Veri seti gözlemlerinin $\hat{F}$ dağılım fonksiyonuyla bağımsız dağılmış rassal değişkenlerdir.

Bu hipotez testi χ^2 testi ile ölçülür. Bu testte, veriye ait oluşturulan histogramla, tahmin edilmiş olasılık yoğunluk fonksiyonu karşılaştırılır. Bu sayede gözlemlerin tüm veri setini temsil edip etmediği farkların karesi yöntemi ile test edilir (Nikulin, 1973).

Kolmogorov-Smirnov testi ise sürekli dağılımları ölçmek için daha uygun bir testtir ve H_0 hipotezi altında deneysel olan dağılım fonksiyonu ile kümülatif dağılım fonksiyonu arasındaki farkı ölçer.

Eğer seçilen bu dağılım uyum iyiliği testinde başarısız olursa, ikinci adıma geri dönülür ve aşamalar farklı bir dağılım seçilerek tekrarlanır.

3.3.1. İstatistiksel Önemlilik Testleri

İstatistiksel önemlilik testleri, evrenden tek bir örneklem içerisinden seçilen verilerin belli bir parametreye sahip olup olmadığını ve birden fazla grup içinden seçilen örneklemlerin arasında önemli bir fark olup olmadığı üzerinde çalışır. Bu sayede örneklem içerisinden alınan verilerin rasgele olup olmadığı test edilir. Hipotez testleri parametrik ve parametrik olmayanlar şekilde gruplandırılabilir (Bircan ve ark., 2003). Parametrik testler için gerekli koşullar sağlanamadığı zaman parametrik olmayan istatistik testleri uygulanması gerekebilir. Örneğin veriler normal dağılmıyor veya veriler tepe noktasının çok dik, çarpıklığın çok yüksek ya da grup varyanslarının eşit olmadığı gibi durumlar söz konusuysa parametrik olmayan testler kullanılmalıdır (Mendenhall ve Sincich, 2007). Parametrik olmayan testler aynı zamanda, ölçümlerin nominal veya sıralı olduğu durumlar da kullanılır.

İstatistiksel önemlilik testleri farklı amaçlarda ve durumlarda kullanılır. Örneğin, seçilen veri setinin tahmin edilen dağılıma ve parametrelere eşit olup

olmadığını belirleyebilmek için ya da seçilen birden fazla grubun arasında anlamlı bir fark olup olmadığını araştırmak için bu testler kullanılır. Bir testin istatistiksel açıdan anlamlı olması, elde edilen sonuçların ya da alınan verilerin tesadüfi olmadığını gösterir. Bu testler uygulanırken testin doğru seçilmesi en önemli adımdır. Önem testleri arasında seçim yapılırken göz önünde bulundurulması gereken faktörler şu şekilde sıralanabilir.

- Veri karakteri: Verilerin sürekli ya da kesikli dağılmış olması seçilecek testi etkiler.
- Grup sayısı: Bazı testler sadece iki grubun karşılaştırılmasına izin verirken, bazı testler ikiden fazla grubu karşılaştırabilen çoklu testlerdir.
- Örneklem büyüklüğü: Veri sayısı test seçimini ve sonucun güvenilirliğini yüksek oranda etkiler.
- Grupların bağımsızlığı: grupların bağımlı ya da bağımsız olduğu durumlarda uygulanacak testler birbirinden farklıdır.

Test sonuçları hipotezler ve p düzeyine göre değerlendirilir. Hipotezler birbirine zıt hükümlü iki yargı olarak kurulur. Temel hipotez yani H_0 elde edilen sonuçların istatistiksel açıdan anlamlı olmadığını, H_1 hipotezi ise elde edilen sonuçların tesadüfi olmayıp istatistiksel açıdan anlamlı olduğunu söyler. p düzeyi ise, hangi noktadan itibaren H_0 hipotezinin kabul ya da reddedileceğini belirlediğimiz değerdir. p değeri, 1'e yaklaştıkça testin güvenilirliği artar.

c^2 dağılımı Pearson'ın ortaya attığı ve günümüzde hala sıkça kullanılan bir dağılım çeşididir. c^2 standart normal dağılıma sahip bir ana kütleden seçilen n tane örneklemin değerlerinin toplamıdır (Aytaç, 1998).

Birbirinden bağımsız niteliksel olan verileri test etmek, uygunluk, varyans, homojenlik gibi testler için χ^2 dağılımı kullanılabilir (Kartal, 1998). χ^2 testi H_0 (kriterler bağımsızdır) ve H_1 (kriterler arasında ilişki vardır) hipotezleri üzerine kurulur. Ayrıca bir örneklemden elde edilen n tane verinin dağılımının seçilen teorik dağılıma uyup uymadığını beklenen değerler (E_i) ve gözlenen değerler (O_i) ile kıyaslanarak bulunabilir (Masoom ve ark., 1992).

χ^2 uygunluk testinde hipotezler,

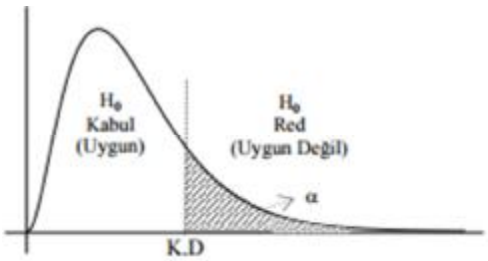
H_0 hipotezi: Gözlenen değerler beklenen değerler ile uyumludur.

H_1 hipotezi: Gözlenen değerler beklenen değerler ile uyumlu değildir.

şeklinde kurulur.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)}{E_i} \qquad (3.8)$$

Görüldüğü üzere, beklenen değerler ile gözlenen değerler birbirine yaklaştıkça χ^2 değeri sıfıra yaklaşacaktır.



Şekil 3.3. χ^2 testi kabul bölgesi grafiği (Bircan, Karagöz, & Kasapoğlu, 2003)

Serbestlik derecesi hesaplamada tahmin edilmesi gereken m değeri parametre sayısıdır. Örneğin, normal dağılım için χ^2 testi uygulanıyorsa, normal

dağılımın 2 parametresi olduğu için $m = 2$ alınır (Akyol ve Gürbüz, 2002). χ^2 tablosundan kritik $\chi^2_{\alpha,n-1-m}$ değeri, hesaplanan serbestlik derecesine $(n-1-m)$ ve önem seviyesi α 'ya göre belirlenir ve hesaplanan χ^2 değeri ile karşılaştırılır.

Buna göre, $\chi^2_{\alpha,n-1-m} > \chi^2$ ise, H_0 hipotezi kabul edilir yani veriler seçilen dağılım ailesine aittir. H_0 hipotezi reddedilirse, farklı bir dağılım ailesi seçip işlemler tekrarlanmalıdır.

Toplanan veriler bilinen olasılık dağılımlarından hiçbirine uymuyor ise ampirik dağılım olarak incelenmesi gerekmektedir.

3.3.2. Ampirik Dağılım Oluşturma

Sistem içerisinde farklı teorik dağılımlara rastlamak mümkündür fakat sistemlerin bu stokastik davranışları temsil edebilecek teorik dağılım her zaman bulunamayabilir. Bu sebeple ampirik dağılımlardan yardım alınır (Öztürk, 2004). Ampirik dağılım fonksiyonu örneklem verilerini küçük basamaklara ayırarak oluşturulan fonksiyondur (Şencan, 2005). Fonksiyonu oluşturmak için kümülatif yüzden değerlerinden yani verilerin gözlem frekans sıklığından yararlanılır. Ampirik dağılım oluşturulurken herhangi bir parametre tahmini yapılmaz, bu sebeple parametrik olmayan bir yöntem olarak tanımlanabilir.

3.3.2.1. Benzetim Verilerinin Geçerliliğinin Testi

Rasgele üretilen sayılar ampirik dağılıma uyduğu görüldüğünde bu sayıların benzetim programında üretilen sayılar ile aynı ana kütleden geldiğini göstermek için çoklu karşılaştırma testleri uygulanmalıdır. Oluşturulan ampirik dağılım fonksiyonundan üretilen sayılar ile benzetim verileri karşılaştırılarak ampirik dağılım fonksiyonun geçerliliği parametrik olmayan testler ile sınanmalıdır. Parametrik olmayan testler ana kütle hakkında bir bilgiye sahip

olunmasa bile güvenli bir şekilde çalışır (Karagöz, 2010). Bu testler c^2, Wald-Wolfowitz, Mann-Whitney U gibi testlerdir.

Wald-Wolfowitz testi verilerin rassallığını inceleyerek gözlemin kendisinden sonra gelen durumu etkileyip etkilemediğini ölçer (Altunışık ve ark., 2005). Eğer etkilenme söz konusu değilse bu verilerin rasgele olduğu anlamı çıkar. Bu testle iki popülasyonun dağılımının ortalamaları incelenerek karşılaştırmak ve aynı dağılıma sahip olup olmadığı incelenir (Daniel, 1990). Bu sayede iki popülasyonun dağılımı karşılaştırılarak benzer olup olmadığına karar verilebilir.

Bu test için hipotezler şu şekildedir.

H_0 : Veri setleri ana kütleden rasgele seçilmiştir.

H_1 : Veri setleri ana kütleden rasgele seçilmemiştir.

Wald-Wolfowitz testinde, gözlem sayısının 20'den küçük olduğu durumlarda tablosu kullanılır. İlk olarak dizilimi oluşturan değerlerin dizi değeri tespit edilir. Örneğin, denizden alınmış balıkların türleri A ve B olmak üzere; AABBBABBAAABABB şeklinde bir örneklem grubu mevcutsa, bu dizilimin dizi değeri AA-BBB-A-BB-AAA-B-A-BB olmak üzere 8'dir. A balık türü için frekans, n_1 =7 ve B balık türü için frekans, n_2 =8 olmak üzere; eğer belirlenen dizi değeri tablodan okunan olan r-alt ve r-üst değerlerinin arasında kalıyorsa, H_0 hipotezi kabul edilir.

Wald-Wolfowitz testinde, gözlem sayısı 20'den büyük ise standart normal dağılım kullanılır.

n_1 : Birinci grubun gözlem sayısı

n_2 : İkinci grubun gözlem sayısı

R : Dizi değeri

olmak üzere test için kullanılan formüller ise şu şekildedir.

$$\mu = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1 \tag{3.9}$$

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{2n_1 n_2 \left(2n_1 n_2 - n_1 n_2\right)}{\left(n_1 + n_2\right)^2 \left(n_1 + n_2 - 1\right)}} \tag{3.10}$$

$$Z = \frac{R - \mu}{\sigma} \tag{3.11}$$

Hesaplanan Z değeri yardımıyla standart normal dağılım tablosundan p değeri bulunur ve α anlam düzeyi ile karşılaştırılır. Tabloda okunan değer daha büyükse H_0 kabul edilir.

Mann ve Whitney tarafından bağımsız iki örneklem grubu analizi için kullanılmak üzere geliştirilen parametrik olmayan bir istatistik testi olan Mann-Whitney U testi, bağımsız normal dağılıma uymayan iki sürekli değişkenlerden oluşmuş örneklem grubu verileri sıralı hale dönüştürerek aynı medyana sahip popülasyondan alınan rasgele örnekler olup olmadığını test eder. n_1 birinci örneğin, n_2 ikinci örneğin sayısı olmak üzere, tüm değerler sıralı hale dönüştürülür. Bu puanların sıralama puanları yazılır. Birinci grup örneklemin az olduğu grup olarak belirlenir ve buna göre Mann-Whitney U tablosundan kritik değer okunur. Ardından her bir grubun U olarak gösterilen değeri hesaplanır. Böylece değerler için asıl dağılımın önemi kalmaz (Kalaycı, 2006).

H_0 : Veri setleri tek ana kütleden gelir.

H_1 : Veri setleri farklı ana kütleden gelir.

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \sum R_1 \qquad U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \sum R_2 \qquad (3.12)$$

n_1 : İlk grubun örneklem sayısı

n_2 : İkinci grubun örneklem sayısı

$\sum R_1$: İlk grubun örneklem sıraları toplamı

$\sum R_2$: İkinci grubun örneklem sıraları toplamı

Hesaplanan U_1 ve U_2 değerlerinden küçük olan kritik değer olarak kabul edilir ve Mann-Whitney U tablosundan okunan değer ile karşılaştırılır. Kritik U değeri tablodan okunan değerden daha küçükse H_0 hipotezi reddedilir.

Hesaplanan U değeri grupları oluşturan örneklem sayısı 20'den büyükse, z değerine dönüşür. Bu z değeri, belirlenen p düzeyine karşılık gelen tablo değeri ile karşılaştırılır. Örneklem sayıları 20'den küçük ise z değeri,

$$z = \frac{U - \left((n_1 n_2)/2\right)}{\sqrt{(n_1 + n_2 + 1) n_1 n_2 / 12}} \qquad (3.13)$$

z tablosundan okunan değer, belirlenen p değerinden düşük ise, H_0 hipotezi reddedilir. Hesaplanan değer, p değerine göre ($p > 0.5$) H_0 hipotezi reddedilirse, ampirik dağılımın daha küçük aralıklara bölünüp daha hassas hale getirilerek tekrardan oluşturulması gerekmektedir.

Bu çalışmada iki grubun aynı kütleden gelip gelmediği araştırılmak istendiği için, Mann-Whitney U testi kullanılmıştır.

3.4. Kuyruk Teorisi

Kuyrukta bulunma, hayatın hemen hemen her alanında mazur kalınan bir durumdur. Kuyruk uzadıkça bekleme süresi uzar ve bireylerin psikolojisini etkileyebilir. Dahası bekleme süresinin uzaması bireyler için büyük zaman ve para kayıplarına sebep olur, bireyler kuyrukta beklemektense katma değeri yüksek işler yaparak ekonomiye katkıda bulunabilir. (Hillier ve Lieberman, 2001). Günlük hayatımınız hemen hemen her noktasında kuyruk sistemine maruz kalırız. Örneğin bankalar, kuaförler, market kasaları, benzin istasyonları ya da bilet sıraları kuyruk sistemlerine birer örnektir. Trafik ışığında bekleme eylemi de kuyruk sistemine örnek olarak verilebilir. Müşteriler her zaman insan olmaz, bir makine parçası, bir araç ya da benzin istasyonunda bekleyen araba müşteri olabilir.

Kuyruk teorisi temelde, bekleme sıralarının ve kuyrukların matematiksel bir ilişkide tanımlanmasıdır. Belli bir varış prensibinde sisteme giren müşteriler hizmet almak için sırada beklerler ve hizmet aldıktan sonra sistemi terk ederler (Gökgöz, 2012). Kuyruklar servis kapasitesinin taleplere karşılık veremediği durumlarda ortaya çıkar. Özellikle hizmet sektöründe kullanılacak servis kapasitesinin büyüklüğü, kuyruk teorisi sayesinde bekleme süreleri ve kuyruk uzunluğu tahmin edilebildiği için, karar verme açısından önemli bir role sahiptir. Servis kapasitesinin yetersiz olması kuyruk oluşturacak, müşteri memnuniyetsizliği yaratacak ya da yarı mamul ürünlerin oluşmasına neden olacaktır. Servis kapasitesinin gerekenden fazla olması ise, atıl kapasite olarak gereksiz maliyet yaratacaktır. Kuyruk teorisinin amaçları, önemli performans değişkenleri olan ortalama bekleme zamanlarının ve kuyruk uzunluğunun tespit edilebilmesini sağlar.

Kuyruk teorisinde müşterilerin ya da siparişlerin hangi anda geleceği, işlem süresinin uzunluğu önceden tahmin edilemediği için sistemin analitik tasarımı zorlaşabilir. Fakat varışlar arası süreler ve işlem süreleri düzeni istatistiksel olarak

dağılım türünün belirlenerek bu problem çözülebilir. Örneğin; servis süreleri rasgele ise, üstel dağılım şeklinde tanımlanabilir. Pozitif ya da negatif yönde küçük sapmalar dışında oldukça sabit bir değişim mevcutsa, normal dağılım düşünülebilir fakat bu değerler sınırlandırılmışsa kesikli normal dağılım olur (Yavuz, 2008).

Kuyruk teorisinin ilk kez Agner Kraurup Erlang tarafından Kopenhang telefon santralinde kullanılmıştır (Sundarapandian, 2009). Bu çalışmada gelen telefon görüşmeleri sayısının Poisson sürecine uyduğunu gözlemlemiştir (Kingman, 2009). Günümüzde fabrikalarda bant uzunlukları, çalışacak işçi sayıları; banka, hastane gibi hizmet sektörlerinde banko, kapı sayıları; telekomünikasyon ve ulaşım mühendisliğinde ve pek çok alanda sıkça kullanılmaktadır (Schlechter, 2009). En basit haliyle kuyruk modelinde; gelişler, bekleme hattı ve servis sistemi olmak üzere üç ana bileşen mevcuttur.

Kuyruk modelini oluşturabilmek için bir takım varsayımlar ve tespitler yapılması ve karakterinin belirlenmesi gerekmektedir. Bunlar; varış parametreleri, müşteri davranışları, servis süreleri, servis disiplinleri, servis kapasiteleri ve kuyruk uzunluğunun alabileceği maksimum değerler olarak sıralanabilir (Adan ve Resing, 2015). Müşterilerin varışlar arası süresi parametreleri birbirinden bağımsız ve ortak bir dağılım olduğu kabul edilir ve pratikte genelde Poisson süreç olarak dağılım gösterir. Müşterilerin kuyrukta beklediği süre içindeki davranışları da kuyruk teorisini modelleyebilmek adına önemlidir. Örneğin; bazı müşteriler uzun süre kuyrukta bekleyebilirken, diğerleri kuyruktan bir süre sonra ayrılabilir.

Servis sistemlerinde; sistemin yapısı ve servis süresi olmak üzere iki temel parça bulunur. Sistem yapısı; tek kuyruk ve tek servis sistemi, çoklu kuyruk ve çoklu servis sistemi, tek kuyruk ve çoklu servis sistemi ya da tek kuyruk ve seri servis sistemi şeklinde olabilir. Kuyruk teorisindeki en önemli noktalardan biri de servis süresidir. Servis süresi tanımlanmış bir dağılım olmalıdır ve bu süre, müşterilerin varışlar arası süresinden tamamen bağımsızdır. Servis süresinin dağılım parametresi, oluşacak kuyruk uzunluğuyla ilişkilidir. Servis süresi uzadıkça, servis almak için kuyrukta bekleyen müşteri sayısı artacaktır.

Kuyruk modellerinde ilgilenilen en önemli kalite parametresi müşteri bekleme süresidir. Bu sebeple kuyruk modellerinde geliştirilmiş iki ana model mevcuttur (Panico, 1969). Bunlardan ilki matematiksel çözümü mümkün olan, özellikleri standart bilinen istatistiksel dağılımlara dayandırılmış analitik modellerdir. Diğeri ise, benzetim tekniği ile çözülmeye çalışılan kuyruk modelleridir (Şimşek, 2004). Kuyruk teorisinde farklı tipteki sistemler için analitik çözümler geliştirilmiştir ve hala günümüzde geliştirilmeye devam edilmektedir.

Temel kuyruk süreçlerinde servis almak isteyen müşteriler geliş kaynağını oluştururlar ve kuyruk sistemine giriş yaparlar. Müşteriler belirlenen servis disiplinine göre servis mekanizmasında işlem görür. İşlem gören müşteriler kuyruk sistemini terk ederler.

Geliş kaynağı servisi talep edecek müşterilerin sayısı olarak tanımlanabilir ve bu müşteriler geliş popülasyonu olarak adlandırılan popülasyondan gelir. Geliş kaynağı büyüklüğü yeteri kadar büyükse sonsuz olarak kabul edilir. Sonsuz geliş kaynağına sahip kuyruk modellerinin analitik çözümü, sonlu kaynağa sahip olan kuyruk modellerinden daha kolaydır. Çünkü sonlu geliş kaynağına sahip kuyruk modellerinde mevcut müşteri potansiyeli etkilenecek se kuyruk sisteminde standart dışı durumlar söz konusu olacaktır.

Kuyruk sisteminin modellenebilmesi için ilk olarak geliş kaynağının matematiksel olarak tanımlanması gerekmektedir. Genellikle belirli bir zaman aralığında gelen müşteri sayısının Poisson dağılımına uyduğu kabul edilir. Bu kabulün bir diğer deyişi, müşteriler arası varış sürelerinin üstel dağılım olduğu şeklindedir. Geliş kaynağında müşteriler tek tek gelebileceği gibi, grup halinde de kuyruk sistemine giriş yapabilirler.

Kuyruk modelinin bir diğer bileşeni kuyruktur. Kuyruk, bir sistemde kaç müşteriye izin verilebildiğinin ölçütü olarak tanımlanabilir ve sonsuz kuyruk varsayımı sonsuz geliş kaynağına benzer şekilde kabul edilir.

Kuyrukta bekleyen müşteriler servisi belirlenen kuyruk disiplinine göre alırlar. Servis disiplini olarak ise pek çok model kullanılır. Örneğin servis veren bir

mekanizma ya da bir grup olabilir. Genelde uygulanan servis disiplinleri; ilk gelen ilk servis görür, son gelen ilk servis görür, önceliğe göre servis görme (acil servislerde) olarak sıralanabilir (Adan ve Resing, 2015).

Servis mekanizması, basit kuyruk modellerinde genellikle bir tane olurken, karmaşık kuyruk sistemlerinde birden fazla, seri veya paralel ya da her ikisinin olduğu bir düzende de mevcut olabilir. Müşteri bir servis noktasını terk ettikten sonra geri dönüşler ile tekrar aynı servis noktasında işlem görebilir. Servis noktasının başlangıcında bitişine kadar olan süre, servis süresi olarak adlandırılır. Servis süreleri bir olasılık dağılımı ile belirlenmelidir. En sık kullanılan olasılık dağılımları üstel dağılım, sabit süreli dağılım, normal dağılım ve erlang dağılımlarıdır.

Kuyruk teorisinde aksi belirtilmedikçe, müşteriler sisteme sınırsız bir kaynaktan teker teker gelirler, kuyruk ne kadar uzun olursa olsun fiziksel açıdan yer mevcuttur, servis önceliği yoktur yani sisteme ilk gelen ilk işlem görür.

Tek kuyruklu bir sistemde, Kendall gösterimi olarak adlandırılan bir biçim kullanılmaktadır (Tijms, 2003). A/S/C olarak genel gösterimi olan bu sıralamada; A (arrival rate) varışlar arası süreyi, S (server time) işlem hızını, C ise sunucu sayısını tanımlar (Kendall, 1953).

Kendall gösteriminde varışlar arası sürenin ve işlem hızının dağılımı için M, D ve G harfleri kullanılır. M, Poisson dağılımı temsil eder, M harfi “memoryless” kelimesinden gelmektedir yani bu süreç Markov yani hafızasız olarak da tanımlanabilir. D, verilerin deterministik yani düzgün bir şekilde sabit bir miktarda oluştuğunu gösterir. G ise verilerin üstel ya da düzgün bir dağılım dışında normal, weibull, gamma, lognormal gibi herhangi bir teorik ya da ampirik dağılımdan oluştuğunu ifade eder. Kendall gösterimindeki servis veren sunucu sayısı ise, s harfiyle temsil edilir ve (s=1,2,3,..) değerlerini alır. Bazı durumlarda sistemin alabileceği maksimum müşteri sayısı belirlenmesi gerekebilir, böyle durumlarda Kendall gösteriminin sonuna bir sembol daha eklenebilir ve A/S/C/N şeklinde gösterim düzenlenebilir (Adan ve Resing, 2015).

Örneğin, M/M/s kuyruk sistemi, s sayıda servis noktasının olduğunu, gelişler arası sürenin ve servis süresinin üstel dağılıma sahip olduğunu gösterir.
Bir kuyruğun performans kriterleri aşağıdaki parametrelerle tanımlanabilir.

W = Müşterinin sistemde beklenen bekleme süresi, $E(W)$

W_q = Müşterinin kuyrukta beklenen bekleme süresi, $E(W_q)$

L = Tüm sistemdeki beklenen müşteri sayısı

L_q = Kuyrukta beklenen müşteri sayısı

ρ = Sistemin kullanım oranı

Bu parametreler hesaplanırken, öncelikle kuyruğun karakteristiği, ardından birim zamanda gelen müşteri sayısı λ ve birim zamanda hizmet gören müşteri sayısı μ belirlenmelidir.

Kuyruk sistemi başladığı zaman, sistemdeki müşteri sayısı başlangıç durumundan ve geçen zamandan etkilenecektir. Örneğin sisteme ilk giren müşteri hiç beklemeden işlem görecektir ve bu durum ortalama kuyrukta bekleme süresini etkileyecektir. Kuyruk sisteminin analitik sonuçlarının görebilmek için, başlangıç koşulundan ve geçen süreden etkilenmeyen durağan durum noktasına ulaşması gerekmektedir. Bir kuyruk sisteminin performans kriterleri hesaplanabilmesi için durağan durumda olması gerekmektedir ve sistemin durağan durumluğu s hizmet veren kanal sayısı olmak üzere $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$ şeklinde kontrol edilir. Eğer sistemin kullanım oranı $\rho > 1$ ise, bu sistemde tıkanıklık vardır. (Hillier & Lieberman, 2001).

P_n kuyrukta n tane müşteri olma olasılığı ve $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ olmak üzere;

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \tag{3.14}$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s)P_n \tag{3.15}$$

şeklinde hesaplanır.

L , W , L_q ve W_q arasında *"Little's Formula"* olarak adlandırılan formüllerle ilişki kurulur (Little, 1961).

Eğer durağan durum halindeki bir kuyruk sisteminde birim zamanda gelen müşteri sayısı sabit λ ve ortalama servis süresi sabit ve $1/\mu$ ise;

$$L = \lambda \mu \tag{3.16}$$

$$L_q = \lambda W_q \tag{3.17}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{3.18}$$

şeklinde bu parametreler arasında ilişki kurulur.

Kuyruk sisteminin karakteristiği iki parametreye bağlıdır. Bunlar gelişler arası süreler ve servis süreleridir. İlk olarak bu parametrelerin olasılık dağılım fonksiyonu belirlenmelidir.

Kuyruk teorisinde bahsedilmesi gereken bir durumda, sistemin doğum-ölüm sürecidir. Her kuyruğun girdileri ve çıktıları bulunur. Bu girdiler yani gelen müşteriler ve çıktılar yani sistemi terk eden müşteriler pek çok kuyruk modelinde doğum-ölüm süreciyle tanımlanmaya çalışılır. Kuyruk sistemi için doğum, sisteme yeni bir müşterinin gelişini, ölüm ise sistemden hizmeti almış müşterinin

ayrılmasını temsil eder. Kuyruk sistemindeki bu doğum-ölüm süreci, sistemin herhangi bir t anındaki müşteri sayısının olasılıksal olarak belirlemek için kullanılır. Kuyruk sisteminin t anındaki durumu ($t \geq 0$), o andaki kuyruk sisteminde bulunan müşteri sayısıyla $X(t)$ tanımlanır. Yani t=0 anı, sistemin başlangıç anındaki müşteri sayısıdır. Benzer şekilde, $P_k(t) = P(X(t) = k)$ t anında sistemde k tane müşteri bulunma olasılığıdır.

3.4.1. M/M/1 Kuyruk Sistemleri

Bu kuyruk modelinde, gelişler arası süreler ve işlem hızları bağımsız ve üstel dağılıma uygun olarak rasgele değişkenler olarak kabul edilir. Kanal sayısıysa, herhangi bir değerde pozitif bir tam sayı değerini almalıdır. Sistem, birim zamanda müşterilerin geliş hızı λ ve birim zamandaki işlem hızı μ ile tanımlanarak gerekli hesaplamalar yapılır. Bu kuyruk sisteminin servis disiplini "İlk gelen ilk işlem görür" yani FIFO' dur. t anındaki müşteri sayısına $X(t)$ denecek olursa, durum uzayı bir stokastik süreç şeklinde davranır.

En temelde, M/M/1 sistemi olarak (tek kanallı kuyruk modeli) ele alınır. Bu kuyruk sisteminde gelişler rassal ve Poisson dağılıma uygun olduğu, hizmet sürelerinin üstel dağılım gösterdiği, sistemin tek kanallı olduğu, müşterilerin sonsuz bir kaynaktan tek tek geldiği, sistemin denge durumunda olduğu ve ilk gelen ilk işlem görür prensibine göre hizmet alacağı varsayımları yapılır (Sarıaslan, 1986). Birden fazla kanal bulunan sistemlerde de her bir kanal ayrı ayrı düşünülerek bu model uygulanabilir (Tierauf ve Klekamp, 1975).

Sistemin kullanım oranı $\rho = \lambda / \mu$ olmak üzere, sistemin formülleri şu şekildedir (Panico, 1969).

Sistemde n tane müşteri bulunma olasılığı

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n \tag{3.19}$$

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \tag{3.20}$$

Kuyrukta bekleyen müşteri sayısı

$$L_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \tag{3.21}$$

Müşterinin sistemde bulunduğu ortalama toplam zaman

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{3.22}$$

Müşterinin kuyrukta bulunduğu ortalama zaman

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \tag{3.23}$$

M/M/s modellerinde ise, gelişler arası süreler ve işlem süreleri bağımsız üstel dağılımdan oluşur fakat çok kanallı bir servis yapısı mevcuttur. Örneğin birden çok veznesi açık olan bir banka sistemi M/M/s sistemine örnek olabilir. M/M/1 kuyruk sistemi için yapılan tüm varsayımlar M/M/s kuyruk sistemi için geçerlidir. Buna göre;

Sistemin kullanım oranı

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \tag{3.24}$$

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s}}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^{2}} P_0 + \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.25}$$

Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.26}$$

Müşterinin sistemde bulunduğu ortalama toplam zaman

$$W = \frac{L}{\lambda} \tag{3.27}$$

Müşterinin kuyrukta bulunduğu ortalama zaman

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{3.28}$$

3.4.2. M/Ek/1 Kuyruk Sistemleri

İşlem sürelerinde üstel ve gamma dağılımın özel hali olan Erlang dağılımı sıkça gözlemlenen bir dağılım türüdür. Tek kanallı poisson gelişlere ve gamma

işlem süresine sahip kuyruk sistemi için $M/E_k/1$ Kendall gösterimi kullanılır. E_k, parametresi k olan Erlang dağılımını temsil eder.

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı

$$L = \frac{k+1}{2k}\frac{\lambda}{\mu-\lambda} \tag{3.29}$$

Müşterinin sistemde bulunduğu ortalama toplam zaman

$$W = \frac{k+1}{2k}\frac{1}{\mu-\lambda} \tag{3.30}$$

şeklinde tanımlanır. $k=1$ olduğu durum, Erlang dağılımın sadece bir adet üstel dağılımdan oluştuğu anlamına gelir ve böylece kuyruk sistemi M/M/1 kuyruk sistemine dönüşür.

3.4.3. M/G/1 Kuyruk Sistemleri

M/G/1 kuyruk modeli ilk olarak 1930 yılında teorik olarak servis dağılım koşulunu ortadan kaldırmak amacıyla çözülmüştür (Pollaczek, 1930). Sonrasında formüller tekrardan Khintchine tarafından ele alınarak çözülerek bugünkü şeklini almıştır.

Bu tek kanallı kuyruk sisteminde gelişler Poisson dağılımına uyacak şekilde birim zamanda λ olacak şekilde gelir. İşlem süresi ise, birim zamanda hizmet gören müşteri sayısı μ olacak şekilde üstel olmayan herhangi bir dağılım şeklindedir. Yani Pollaczek-Khintchine formülleri yardımıyla işlem zamanın sadece ortalaması ve varyansı bilinmesiyle kuyruk sistemi analizi yapılabilmektedir. M/M/1 sistemi için yapılan durağan durum, kaynağın sonsuz gelişli olması gibi yapılan tüm varsayımlar M/G/1 modeli için geçerlidir.

Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı

$$L_q = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} \tag{3.31}$$

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + L_q \tag{3.32}$$

Müşterinin sistemde bulunduğu ortalama toplam zaman

$$W = \frac{L}{\lambda} \tag{3.33}$$

Müşterinin kuyrukta bulunduğu ortalama zaman

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{3.34}$$

3.4.4. G/G/1 Kuyruk Sistemleri

Kuyruk teorisinde, G/G/1 kuyruk sistemi tek bir sunucuya sahip gelişler arası ve işlem zamanın üstel dağılım ailesi dışında bir dağılıma sahip olduğu durumdur (Bhat, 2008).

Kendall gösterimine göre, G harfi gelişler arası ve işlem süresinin genel dağılım olduğu tek kanallı bir kuyruk sistemi olduğu anlaşılmaktadır (Kendall, 1952).

John Kingman ele aldığı, G/G/1 sisteminde Pollaczek-Khintchine formüllerinden yararlanılarak ve Kingman difüzyon yaklaşımı adı verilen yaklaşık çözüm metodunu ortaya atmıştır (Kingman, 1961). Buna göre C_a^2 ve C_s^2 sırasıyla gelişler arası ve servis süresinin değişim katsayısı olmak üzere, kuyrukta bekleme süresi W_q;

$$W_q(G/G/1) \approx \left(\frac{C_a^2 + C_s^2}{2}\right) W_q(M/M/1) \qquad (3.35)$$

G/G/1 sistemi için kullanılan bu yöntem kesin sonuç olmaması üzerine yapılan çalışmalarda, bu yaklaşımla elde edilen sonuçların, gerçek bekleme süresinin üst limiti olduğu görülmüştür (Kraemer ve Langenbach-Belz, 1976).

3.5. Üretim Sistemlerinde Benzetim Modelleme

En basit şekilde model, bir sistemin gösterimi olarak tanımlanabilir. Bilgisayar sistemlerinde; malzeme taşıma, stok kontrol gibi üretim alanında; ücretlendirme politikası, iş gücü planlaması gibi konularda işletme alanında; nüfus tahmini, karayolu tasarımlarında; salgın hastalık kontrolü gibi konularda Benzetim modelleri kullanılabilir (Pedgen ve ark., 1995). Kurulan model, gerçek sistemi temsil etmeli ve sonuçları elde edebilecek detaylara sahip olmalıdır (Banks, 1998).

Eğer bir sistem, gerçek durumunda çözümlenemeyecek kadar karışık; kurulan modelin matematiksel temsili analitik olarak çözülemiyorsa, gerçek sistem üzerinde çalışmaya uygun değilse ya da tasarım aşamasındaysa, sistem analitik olarak çözülmesine rağmen çözüm kümesi birden fazla ya da ilgilenilen bölgenin dışındaysa benzetim modeline başvurulur.

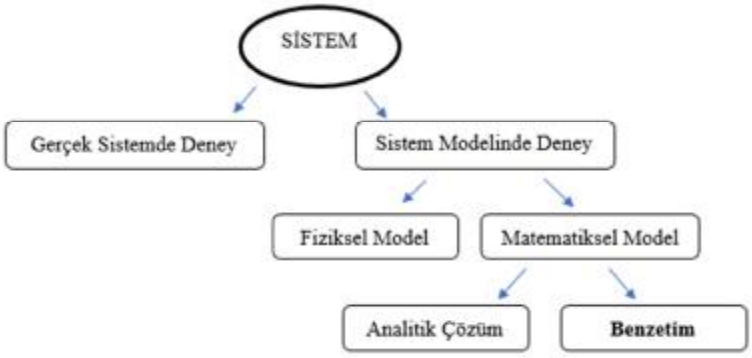
Benzetim modelinin kullanılarak elde edilmesi beklenen bir takım amaçlar söz konusudur. Benzetim modeli, belirlenen bir kritere göre modelin ne kadar iyi çalıştığını değerlendirmek ya da farklı sistem ve politikaların karşılaştırılması için

kurulması amaçlanabilir. Sistem için önemli bir parametre olan performans tahminleri ya da performans üzerine hangi faktörlerin etkili olduğunu belirlemek amacıyla duyarlılık analizi veya belirlenen performans kriterleri ve bunların faktör düzeyine göre en uygun kombinasyonların belirlenmesi yine benzetim yardımıyla tespit edilebilir.

Benzetim modeli kullanmanın avantajları olduğu gibi dezavantajları da bulunur.

Avantajlar;

- Benzetim modeline uygulanabilecek yeni politikalar ve tasarımlar entegre edilerek kısa bir süre içinde sonuçlar görülebilir.
- Benzetim modellerini çözümlemek analitik çözümleri uygulamaktan çok daha kolaydır.
- Benzetim modelinde veri elde etmek, gerçek modelde veri etmekten çok daha ucuzdur.
- Benzetim modelleri, bir durumu çözümleyecek tek yol olabilir.
- Analitik problemlerde performans ölçüleri kısıtlı sayıda olmasına rağmen, Benzetim modellerinde pek çok performans ölçütü sisteme eklenebilir.
- Analitik çözümlerde bazı kabuller yapılması gerekirken, benzetim problemlerinde bu kabullerin yapılmasına gerek yoktur.
- Dezavantajlar;
- Benzetim modelinin kurulması zaman alır ve geçerliliğinin test edilmesi gerekmektedir.
- Benzetim modelleri birden fazla replikasyonda çalıştırılmalıdır ve replikasyon sayısının belirlenmesi gerekmektedir.
- Benzetim modeli belirlenen bir girdi veri seti için, sistem çıktıları elde eder, matematiksel olarak bir çözümde bulunmazlar (Pedgen ve ark., 1995).



Şekil 3.4. Bir sistemin benzetim modeline giden çözümlemesi (Law ve Kelton, 2000).

Benzetim modellerinde, değerler tüm zaman noktasında sürekli, bazı kesikli zaman noktalarında sürekli, herhangi bir zaman noktasında kesikli ya da bazı kesikli zaman noktalarında kesikli olabilir. Örneğin kesikli benzetimlerde, değişkenler zaman içinde sadece kesikli noktalarda durum değiştirir. Bir banka sisteminde, sisteme müşteri geldiğinde ya da hizmet tamamlandığında müşteri sayısı değişir. Bu kesikli modeli deterministik olarak ya da bazı uygun olasılık dağılımlarıyla örnekleyerek, çalışması gereken vezne çalışanı sayısı ya da müşterilerin bekleme süresi hesaplanabilir.

Sürekli sistemlerde ise, durum değişkenleri zaman boyunca sürekli olarak değişir. Tren ya da uçak gibi bir ulaşım aracı düşünülecek olursa, durum değişkenleri olan hız ve konum sürekli olarak değişir (Andradóttir ve ark., 1997). Bu sebeple kurulacak olan benzetim probleminde sürekli olasılık dağılımları kullanılması gerekmektedir (Banks ve Carson, 1985).

Bir benzetim çalışmasının aşamaları şu şekildedir.

Problem formülasyonu: Benzetim modellenmesinde ilk olarak problem tanımlanmalıdır. Bir sistemde herhangi bir problem mevcut değilse, o sistem için benzetim modelinin oluşturulması anlamlı değildir. Benzetim çalışmasının amacı ve problem açıkça belirlenmeli, maliyet ve zaman kriterleri planlanmalıdır.

Veri toplanması ve model oluşturulması: Gerçek sistem için girdi bilgilerinin ve verilerin toplanarak olasılık dağılımları belirlenmelidir.

Sağlama: En önemli adımlardan biri olan sağlamada modelin geçerliliğinin test edilmesi gerekir. Modelin sağlamasının yapılması, modele olan güveni arttırır. Özellikle verilerin belirlenen olasılık dağılımlarının yeterliliği uyum-iyilik testleriyle sınanmalıdır.

Doğrulama: Model genel amaçlı bir dil ya da benzetim dillerinden biri kullanılarak kodlanır ve çalışıp çalışmadığı test edilir.

Deney Tasarımı: İzlenecek performans kriterleri; deney sayısı, modelin çalışma süresi, deney tekrar sayısı modelin dinamiklerine göre belirlenir.

Çalıştırma ve Analiz: Tasarımı yapılan model benzetimi çalıştırılır ve sonuçlar kaydedilir.

Raporlama ve Dokümantasyon: Elde edilen çıktılar istatistiksel yöntemlerle analiz edilir ve kaydedilir. Toplanan bilgiler ve sonuçlar karar vericiye sunulur.

Gerçekleme: Karar verici, uygun olan değişikliği gerçek sisteme entegre eder.

Benzetim modelleme için ilk olarak sistem ve sistem çevresi iyi tespit edilmelidir. Sistem; bir amaç için düzenli etkileşimde bulunan nesneler topluluğu olarak tanımlanabilir. Sistemin içindeki düzeni dışında etkilendiği değişikliklerin bulunduğu sınır ise sistem çevresi denir. Sistem çevresi, ilgilenilen performans kriterine göre kullanıcı tarafından karar verilir (Watson ve ark., 2007).

Varlıklar sisteme giriş yapan müşteri, parça, proje gibi sisteme giren nesnelerdir. Bu nesnelerin farklılıkları, özelliklerle (Attribute) tanımlanır.

Faaliyetler yapılacak işlemi ve bu işlemin zaman periyodunu tanımlar. Kaynaklar bu işlemlerin yapılabilmesi için kullanılan güçtür. İnsan, makine, zaman ya da para gibi güçler kaynak kategorisinde sınıflandırılabilir (Aydın, 2016).

Kontroller, sistemdeki faaliyetlerin programlanmasıyla ilgilenir. Bakım politikası, üretim ya da iş programı sistemin kontrol bloğunu oluşturur.

Sistemin performans ölçütleri

- Çevrim Zamanı: Bir ürünün üretilme zamanı
- Doluluk (kullanım) Oranı: Ekipmanın veya personelin üretken olduğu zaman yüzdesi
- Bekleme Zamanı: Bir müşterinin servis görebilmek için veya bir parçanın işlenebilmesi için kuyrukta geçirdiği ortalama zaman
- Kalite: Doğru özelliklere sahip ürün yüzdesi
- Maliyet: Sistemin maliyeti olabilir.
- W = Müşterinin sistemde beklenen bekleme süresi
- W_q = Müşterinin kuyrukta beklenen bekleme süresi
- L = Tüm sistemdeki beklenen müşteri sayısı
- L_q = Kuyrukta beklenen müşteri sayısı
- r = Sistemin kullanım oranı

3.6. Karma Dağılımlar

Bazı durumlarda veri setleri incelenirken, dönüşümlerin bile yardımcı olamayacağı durumlarla karşı karşıya kalınabilir. Bu gibi durumlarda sonlu karma dağılım modellerinden yardım almak gerekebilir. Çoğu istatistiksel modelde gözlem değerleri tek bir dağılımdan geldiği varsayılarak yapılır. Fakat gerçek durumda sahip olunan veri seti birden fazla farklı dağılımlara sahip kaynaktan oluşabilir. Bu gibi durumlarda veri setini tanımlayabilmek için standart modeller kullanılamaz ve bu noktada sonlu karma modeller devreye girer (Kessler ve McDowell, 2012). Sonlu karma modelleri, verilerin iki veya daha fazla alt popülasyondan (bileşenler) kaynaklandığı şeklinde görülebilen çeşitli önemli pratik durumlarda heterojen verileri modellemek için giderek daha fazla kullanılmaktadır (Wengrzik, 2012). Sonlu karma dağılımlar esnek bir çalışma alanı sunmasına

rağmen, bileşenlerin oluşturduğu dağılımlar bilinen bir dağılımdan gelmiyorsa, parametreleri belirleyebilmek için kernel yoğunluk tahmini gibi parametrik olmayan yöntemler kullanılması gerekebilir (Kessler ve McDowell, 2012). Bu modeller verilerin farklı gruplardaki kombinasyonlarından oluştuğu pek çok farklı alanda yaygın olarak kullanılır (Li, 2016).

Rasgelelik içeren doğal olayların da birbirinden farklı özelliklerini istatistiksel olarak tanımlayıp modellemek anlamında matematiksel bir yaklaşım sağladığı için karma dağılım modelleri genetik, tıp, ekonomi, mühendislik gibi alanlarda kullanılmaktadır (Çalış, 2005). Örneğin bir biyoloji uygulamasında karma bileşenleri oluşturan gruplar yaş, cinsiyet, tür, coğrafya olabilir. Yani sonlu karışık modeller, verilerde gözlenmemiş heterojenliği açıklayan bir mekanizma sağlar. Verilerin bazı önemli sınıflandırmaları (bölge, yaş grubu veya cinsiyet gibi) her zaman ölçülemeyebilir. Bu belirsiz sınıflandırma değişkenleri, geleneksel modelde az yayılma, aşırı yayılma veya değişken varyans yaratabilir. Sonlu karışık modeller, daha esnek formları ile bu problemlerin üstesinden gelir.

Bilinen dağılımlardan oluşan dağılımların karması, bazı durumlarda yine bilinen bir dağılımı oluşturabilir. Burada karşılaşılan problemlerden en önemlisi, veri setinin birden fazla dağılımın karmasından oluşup oluşmadığının tespiti ve bu dağılımların belirlenebilmesidir.

Çizelge 3.5. Karma dağılımların oluşturduğu dağılımlar (Ma, 2018).

Dağılımlar	Oluşan Karma Dağılım Türü
Üstel + Gamma	Pareto dağılımı
Normal + Normal	Normal dağılım
Gamma + Gamma	Genelleştirilmiş Pareto dağılımı
Gamma + Geometrik	Üstel dağılım

$f_1(x)$ ve $f_2(x)$ şeklinde olasılık yoğunluk fonksiyonlarına, p_1 ve p_2 karma oranlarına sahip olan X rasgele değişkenlerinin $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu (3.36)'da gösterildiği gibidir.

$$f(x)=p_1 f_1(x)+p_2 f_2(x) \quad p_1,p_2>0 \quad p_1+p_2=1 \tag{3.36}$$

k bileşenli bir sonlu $f(x)$ karma dağılım fonksiyonu (3.37) için en yaygın şekilde kullanılan matematiksel gösterim verilmiştir.

$$f(x)=\sum_{i}^{k} p_i f_i(x), \quad 0 \le p_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \tag{3.37}$$

Bu formüllerde k bileşen sayısı bilindiği kabul edilmiştir fakat çoğu uygulamalarda bileşen sayısı bilinmez. Bileşen sayısı, ardından karma oranları ve parametrelerin tahmin edilmesi gerekmektedir (McLachnan ve Peel, 2000).

İlk olarak tek değişkenli iki bileşenli varyansları eşit normal karma dağılımı ele alacak olursak, p_1 ve p_2 karma oranlarında σ^2 ortak varyanslı, μ_1 ve μ_2 ortalamalı sonlu normal karma dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilir (McLachnan ve Peel, 2000).

$$f(y_j) = p_1 f(y_j;\mu_1,\sigma^2) + p_2 f(y_j;\mu_2,\sigma^2) \tag{3.38}$$

$$f(y_j;\mu,\sigma^2) = (2\pi)^{(-\frac{1}{2})}\sigma^{-1}\exp\{-\frac{1}{2}(y_j-\mu)^2/\sigma^2\} \tag{3.39}$$

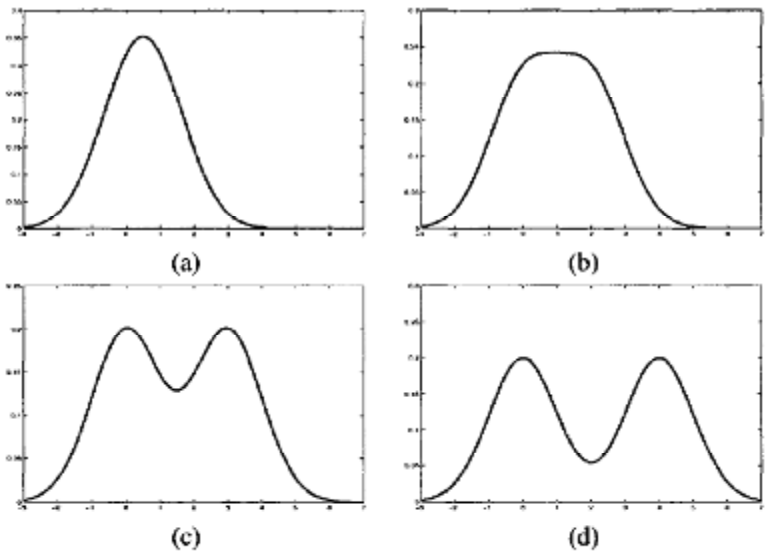
Sonlu karma dağılımlarda üç farklı parametre çeşidi vardır. İlki karma dağılımı oluşturan bileşen sayısı, k, ikincisi karma oranları, p, ve bileşenlerin dağılım parametreleridir (Açıkgöz, 2007).

Bir dağılımın, parametreleri bilinen, k tane normal dağılım karmasından oluştuğu biliniyorsa, ortalama değeri ve varyansı en çok olabilirlik yöntemi ile hesaplanabilir.

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} p_i \mu_i \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i ((\mu_i - \mu)^2 + \sigma_i^2) \tag{3.40}$$

Fakat gerçek durumlarda veri setinin karma dağılımdan oluşup oluşmadığı, karma dağılıma sahipse kaç bileşeninin olduğu, hangi dağılımlardan geldiği tespit edilmeye çalışılmalıdır. Eğer veri seti incelendiğinde bilinen herhangi bir teorik dağılıma uymuyor, birden çok noktada tepeler oluşuyor veya geniş tepe noktaları mevcutsa veri setinin karma dağılım ile temsil edilebileceği düşünülmelidir.

Eğer iki bileşenli normal karma dağılımın yoğunluğu birbirinden yeteri kadar ayrılmış ise; bu duruma çift tepeli karma dağılım adı verilir. Bu tarz karma dağılımların belirlenmesi karma dağılımı oluşturan dağılımların yoğunluk fonksiyonu tepeleri birbirinden uzaklaştıkça kolaylaşır. Çift tepeli karma dağılımı daha iyi tanımlayabilmek için D ile gösterilen Mahalanobis mesafesi tanımından yardım alınabilir. $D = |\mu_1 - \mu_2| / \sigma$ ile tanımlanan bu değer arttıkça, dağılımların tepe noktaları birbirinden uzaklaşır ve karma dağılımın bileşenlerini belirlemek kolaylaşır. Fakat $D = 1$ olduğu zaman karma dağılımı oluşturan normal dağılımlar birbirinin içine geçmiş demektir ve bu da karma dağılımın bileşenlerine ayırmayı zorlaştırır. Aşağıdaki grafikte eşit karma oranından ve varyanstan oluşan iki bileşenli normal karma dağılımın farklı D değerlerindeki olasılık yoğunluk fonksiyonundaki değişim görülebilir.



a) $\Delta = 1$ b) $\Delta = 2$ c) $\Delta = 3$ d) $\Delta = 4$

Şekil 3.5. Eşit karma oranından ve varyanstan oluşan iki bileşenli normal karma dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu (McLachnan & Peel, 2000).

Bir normal karma dağılım tek tepeli, çift tepeli ya da simetrik olma koşulları farklı şekillerde tanımlanmıştır.

Eğer tek boyutlu iki bileşenli bir normal karma dağılıma sahipsek;

1. Karma oranları birbirine eşit olmak koşuluyla, $\sigma_1 = \sigma_2$ ya da $\mu_1 = \mu_2$ durumunda bu karma dağılım simetriktir.
2. $\mu_1 = \mu_2$ olduğu tüm durumlarda, karma oranları ya da varyanslara bakılmaksızın bu karma normal dağılımın tek tepeli olduğu yorumunu yapabiliriz. Bu iki normal dağılım birbirinin içine geçmiştir ve ortak μ değerinde tepe noktasına ulaşmıştır.
3. Tüm p (karma oranı) değerleri için, tek tepeli ve çift tepeli olma koşulları sırasıyla şu şekilde tanımlanmıştır (Eisenberger, 1964).

$$(\mu_2 - \mu_1)^2 < \frac{27\sigma_1^2\sigma_2^2}{4(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \tag{3.40}$$

$$(\mu_2 - \mu_1)^2 < \frac{8\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \tag{3.41}$$

4- Benzer şekilde tek tepeli bir normal karma dağılım için bir başka koşulda aşağıdaki şekilde belirtilmiştir (Behboodian, 1970).

$$|\mu_2 - \mu_1| \leq 2\min(\sigma_1, \sigma_2) \tag{3.42}$$

Sonlu karma modelleri, verilerin iki veya daha fazla alt popülasyondan (bileşenler) kaynaklandığı şeklinde görülebilen çeşitli önemli pratik durumlarda heterojen verileri modellemek için günden güne daha fazla kullanılmaya başlanmıştır. Bu bileşenlerin parçalanması, karışımın parametrelerini tahmin etme problemine yol açar. Karma dağılımı bileşen sayısı olan k'yı tahmin etmek henüz tamamen çözülmemiş zorlu bir süreçtir (McLachnan ve Peel, 2000). Bu konudaki belirsizlik bir takım parametriksel varsayımlar ve yığılım analizi uygulamasıyla çözülebilir (Çalış, 2005). Veri setinin karma dağılımdan oluşup oluşmadığını kontrol etmek için hipotez tezinde bir ya da iki bileşenden oluştuğu kabul edilerek ilk inceleme yapılabilir.

$H_0 : f(x) = f(x;\mu,\sigma)$ Veri seti karma dağılım değil
$H_1 : f(x) = pf_1(x;\mu_1,\sigma_1) + (1\text{-}p) f_2(x;\mu_2,\sigma_2)$ Veri seti iki bileşenli karma dağılım

Fakat kurulan hipotez tezindeki parametreler de bilinmediğinde bu test yönteminin uygulanması çok zordur. Maksimum olasılık tahmini, parametreler için

tahminler elde etmek için yararlı bir araçtır. Bununla birlikte, sonlu bir karışım durumunda ilgili olasılık denklemleri analitik olarak çözülemez, sayısal bir prosedür gereklidir.

Bir veri setinin karma dağılım modelini oluşturmak için pek çok parametre tahmin yöntemi mevcuttur. Bu yöntemlerden en çok kullanılanları; grafiksel yöntemler, momentler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi, en küçük kareler yöntemi ve c^2 gibi yöntemlerdir (Çalış, 2005). Bu yöntemlerin amacı, verinin hangi dağılımlardan geldiğini tespit edebilmek ve modeldeki bu dağılımların parametreleri doğru tahmin edebilmektir.

3.6.1. Karma Dağılımlarda Bileşen Sayısı Belirleme

Bir karma dağılımın analiz edilebilmesi için öncelikle k bileşen sayısı tahmini yapılmalı, sonrasında her bir bileşenin parametreleri hesaplanmalıdır.

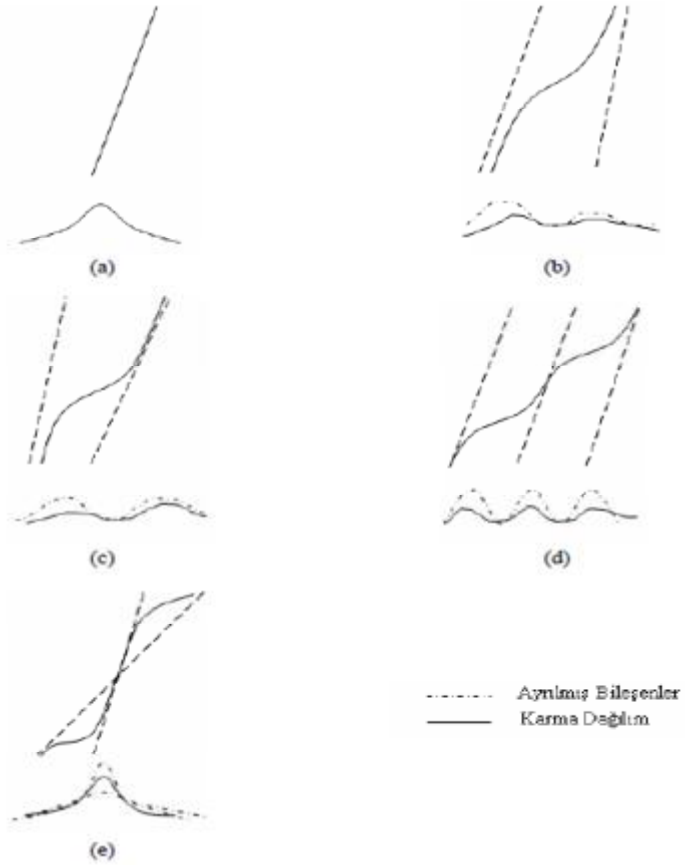
Karma dağılımlarda bileşen sayısı belirleme, heterojenliğin bulunduğu bir veri seti içerisindeki küme sayısı ve yapısının incelenmesi ve ayrıştırılması şeklinde tanımlanabilir. Temel amaç, oluşturulan kümeler içindeki verilerin birbirine olan uzaklığın en küçük, farklı kümelerdeki verilerin arasındaki uzaklığın ise en büyük olacak şekilde kümelenmesidir (Arabie ve ark., 1996). Yani heterojen olan bir veri setini homojenlik gösteren anlamlı parçalara bölmektir (Fraley ve Raftery, 1998).

Karma dağılımlarda veri setinin oluştuğu dağılımların türü ve sayısı bilinmemesi en önemli problemdir. Bu sebeple bileşen sayısının belirlenmesi için bilgi kriteri analizinin de yapılması gereklidir (Bozdoğan, 1994). Bileşen sayıları bilinen karma dağılımlı veri setinin parametre tahminleri çeşitli yöntemler kullanılarak yapılabilir.

3.6.1.1. Histogramlar ve P-P, Q-Q grafikleri

Histogramlar kümelenme yapısının belirlenmesi için tek boyutlu veri setlerinde ilk adım olarak kullanılabilir. Veri setindeki tek tepeli bir dağılım, herhangi bir kümeleme göstermeyen bir homojen yapının temsiliyken birden fazla modun olduğu bir yoğunluk grafiği heterojen bir veri setini tanımlayabilir (Everitt ve Dunn, 2001). Birden fazla tepenin olduğu durumlar heterojenlik için çok önemli bir kanıt niteliğindedir (Servi, 2009).

Bir veri setinin karma normal dağılımdan oluşup oluşmadığını tespit etmek için Q-Q ve P-P grafikleri yardımcı olabilir. Q-Q grafiği, veri setinin nicelik çizimdir, seçilen bir dağılıma karşılık veri setinin dağılım niceliğini durumları eşit büyüklükte gruplara bölerek inceler. Eğer seçilen değişken test dağılımına uyarsa, noktalar Q-Q grafiği üzerindeki beklenen normal değişkenlerin oluşturduğu çizgi etrafında kümelenir (Pallant, 2005). Yapılan bir çalışmada normal karma dağılımlarda Q-Q grafikleri arasındaki ilişki vurgulanmıştır (Titterington ve ark., 1985). Q-Q grafiğinde oluşan salınımlar veri setinin birden fazla bileşen içermesine kanıt olarak gösterilebilir.



Şekil 3.6. Normal karma dağılım ve Q-Q grafiği arasındaki ilişkiler (Titterington, Smith, & Makov, 1985)

(a) şeklindeki gibi bir Q-Q grafiği mevcutsa, bu veri setinde herhangi bir karma yapıdan bahsedilemez.

(b) durumunda varyansları ve karma oranları eşit, farklı ortalamaya sahip iki bileşen söz konusudur.

(c) durumdaysa veri setini oluşturan iki normal dağılımın hem karma oranları, hem varyansları hem de ortalamaları birbirinden farklıdır.

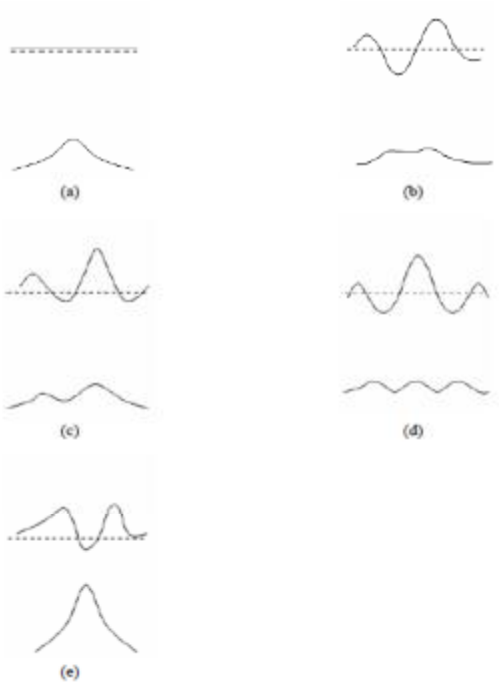
(d) şeklindeki Q-Q grafiğiyse, eşit karma oranları ve varyansı olan farklı ortalamalardaki üç normal dağılımdan oluşan bir veri setini temsil eder.

Son olarak (e) durumunda, eşit karma oranındaki aynı ortalamaya fakat farklı varyanslara sahip iki normal dağılımın grafiği olarak yorumlanır.

Sadece Q-Q grafiklerinin şekline bakılarak bileşen sayısı hakkında yorum yapılması görsel olarak bir tahmin yapılmasından dolayı tam anlamıyla güvenilir değildir. Bu sebeple Q-Q grafiklerinin yanında P-P grafiklerinin de incelenmesi gerekebilir (Fowlkes, 1979).

P-P grafikleri, veri setinden oluşturulan ampirik bir kümülatif yoğunluk fonksiyonu grafiğini bilinen teorik bir kümülatif yoğunluk fonksiyon grafiğiyle karşılaştırılması prensibine dayanır.

Q-Q grafiği için yapılan çalışmaya benzer bir şekilde P-P grafiği için de bir takım denemeler yapmıştır. P-P grafiğinde eğer veri seti yatay çizgi üzerinde ilerliyorsa, bu veri seti normal dağılım davranışında bulunuyor denilebilir.

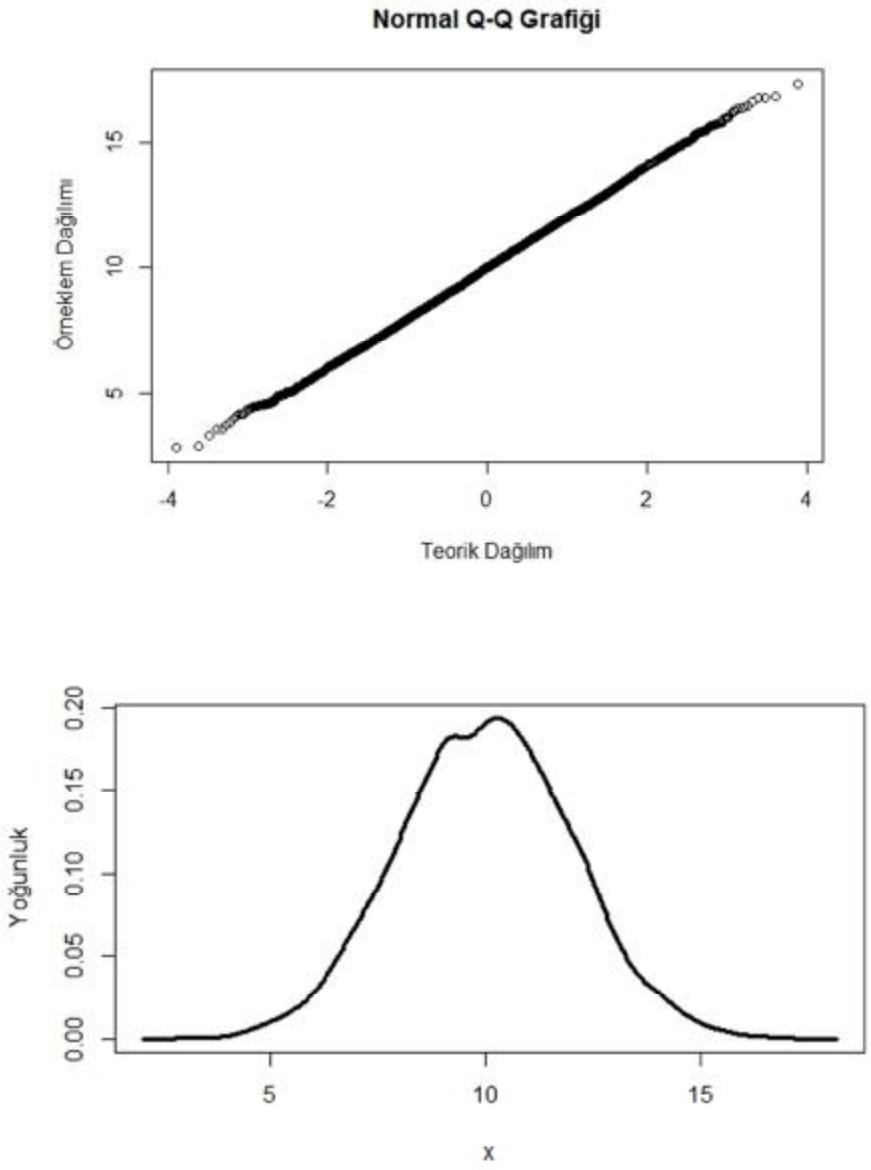


Şekil 3.7. Bazı normal karmalara ait şematik olarak Fowlkes grafikleri

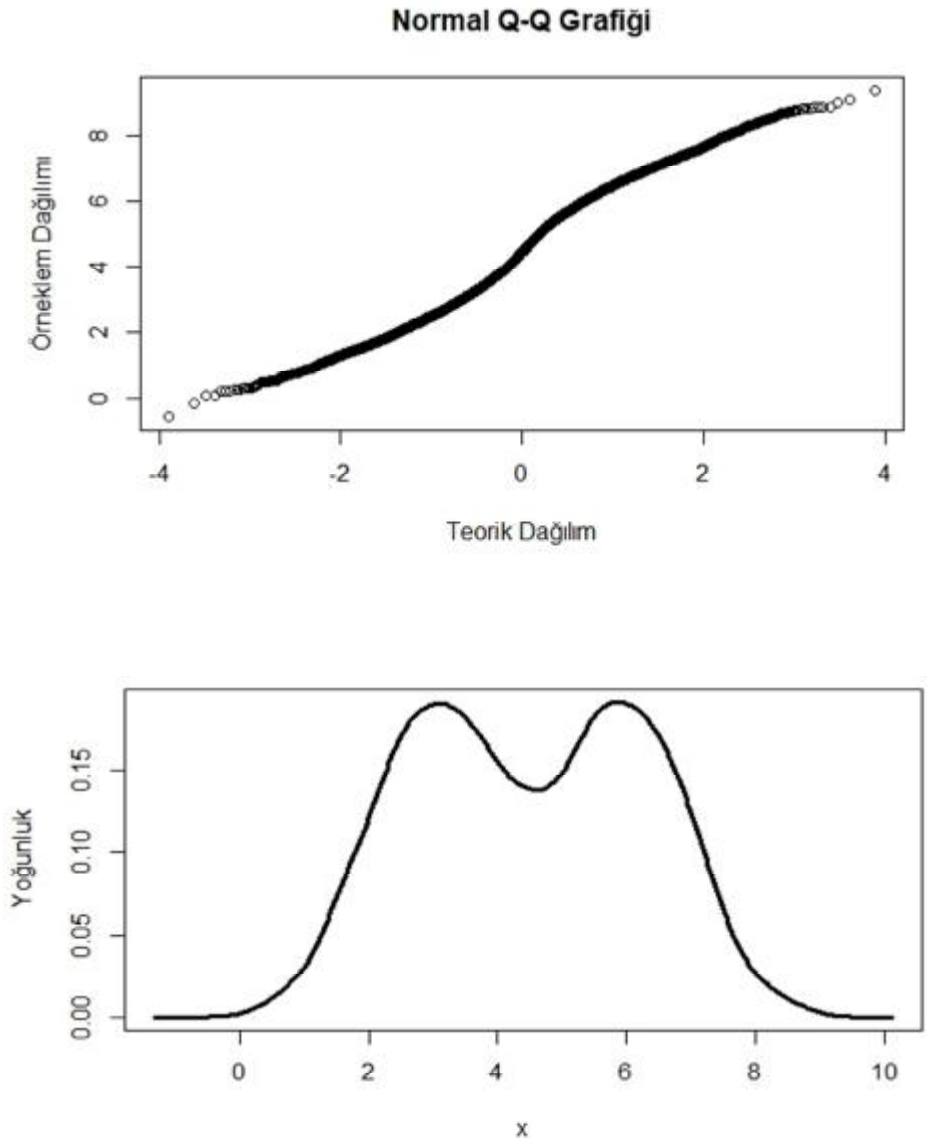
Ayrıca yapılan bu çalışmaya göre, P-P grafiklerinin en az Q-Q grafikleri kadar kullanışlı olduğu söylenebilir (Fowlkes, 1979). Bu sebeple bu çalışmada veri setleri incelenirken hem Q-Q hem de P-P grafikleri göz önünde bulundurulacaktır. Üretilen bir takım saf ve karma normal dağılımların Q-Q ve olasılık yoğunluk fonksiyon grafikleri incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

İlk olarak N~(10,2) dağılımı ele alınarak tek bir normal dağılımın nasıl grafikler oluşturduğu incelenmiştir.

Şekil 3.8.'de görüldüğü üzere, normal dağılıma sahip verileri Q-Q grafiğinde doğru üzerinde sıralanmıştır. Herhangi bir salınım olmadığından dolayı, bu veri seti için tek bileşenden oluştuğu yorumu yapılabilir.



Şekil 3.8. N~(10,2) dağılımına sahip üretilen 10000 sayının Q-Q ve yoğunluk grafiği



Şekil 3.9. %50'si N~(3,1) ve %50'si N~(6,1) karma dağılımına sahip 10000 sayının Q-Q ve yoğunluk grafiği

İkinci durumda %50'si N~(3,1) ve %50'si N~(6,1) dağılımlarından oluşan karma dağılım oluşturulmuştur.

Şekil 3.9. incelendiğinde, %50'si N~(3,1) ve %50'si N~(6,1) %50 dağılımlarının oluşturduğu karma dağılım verileri Q-Q grafikleri üzerinde salınımlar oluşturmuş ve yoğunluk grafiğinde iki dağılımın tepeleri görülebilmeye başlamıştır.

Üçüncü durumda. %40'ı N~(4,1) ve %60'ı N~(7,2) dağılımlarından oluşan karma dağılım incelenmiştir.

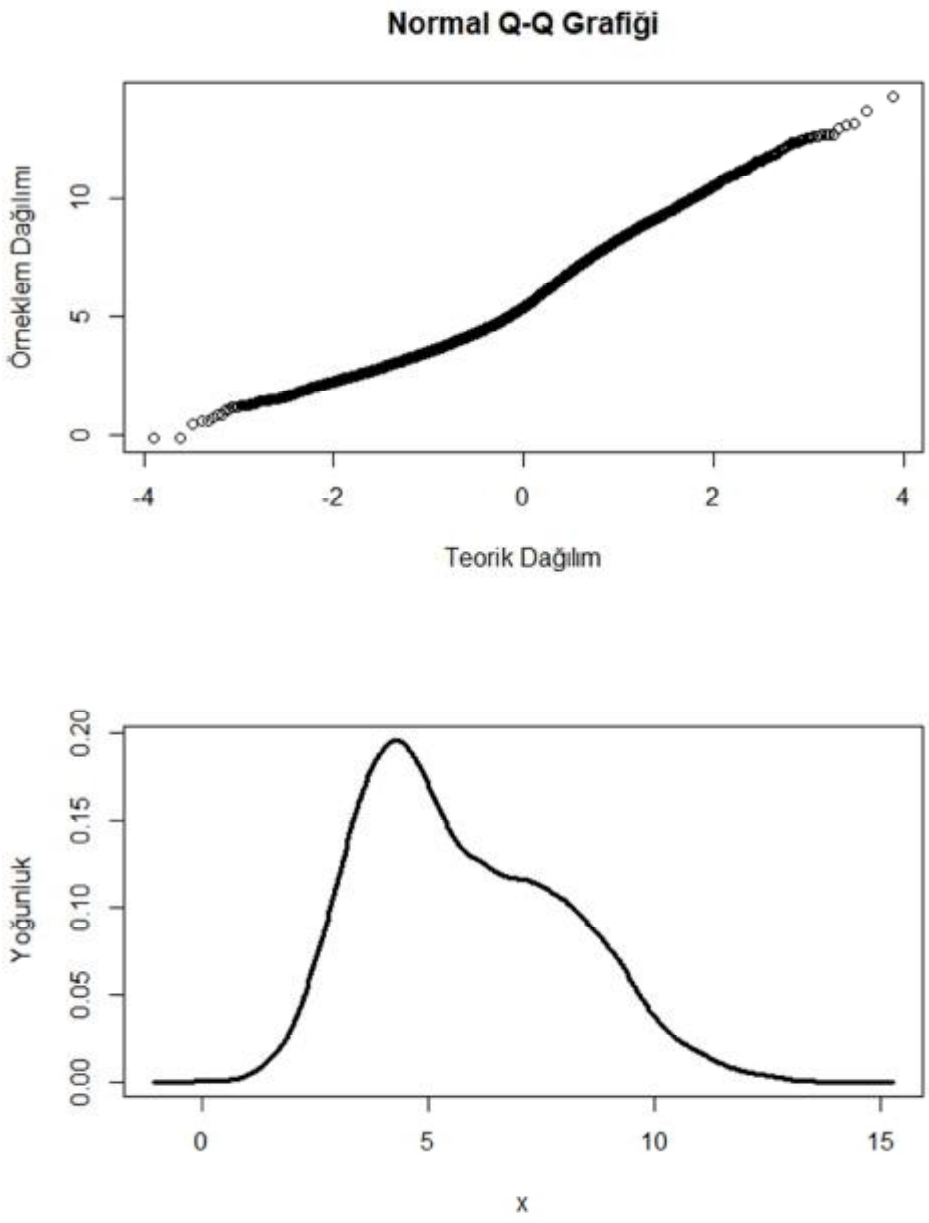
Şekil 3.10.'a bakılacak olursa, Q-Q grafikleri salınımı çalışılan veri setinin birden fazla bileşeni olabileceğini gösterir. İki dağılımın ortak kesiştiği değerlerden dolayı Q-Q grafikleri keskinliğini yitirmeye başlamıştır.

Dördüncü durumda %20'si N~(3,1), %50'si N~(10,2) ve %30'u N~(20,4) dağılımlarının oluşturduğu karma dağılım ele alınmıştır.

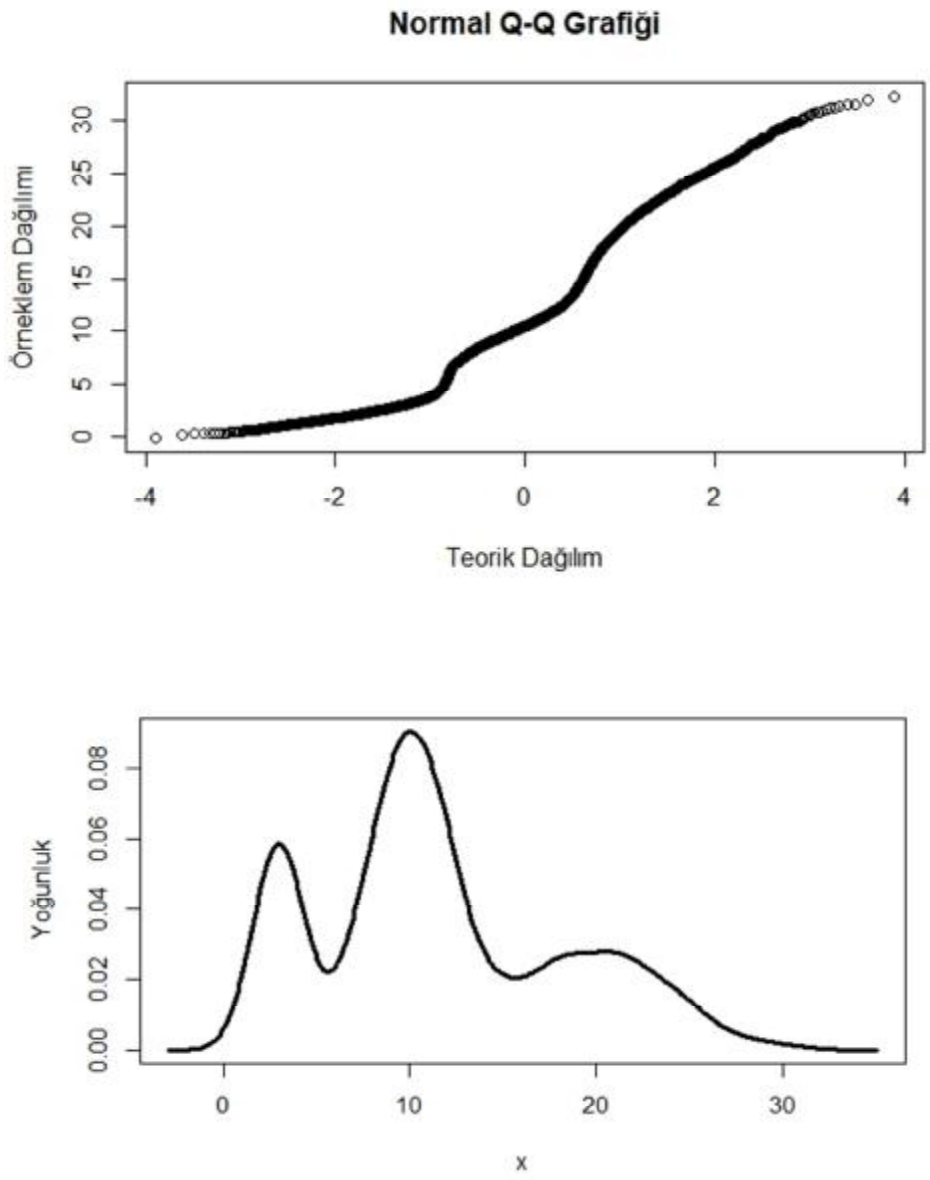
Şekil 3.11.'de Q-Q ve yoğunluk grafiğinde salınımlar yine veri setinin karma dağılım olabileceğini destekler fakat bileşen sayısının $k = 3$ olduğu net olarak tespit edilememektedir.

Son olarak %20'si N~(3,2), %30'u N~(5,2) ve %50'si N~(10,1) karma dağılımı gösterilmiştir.

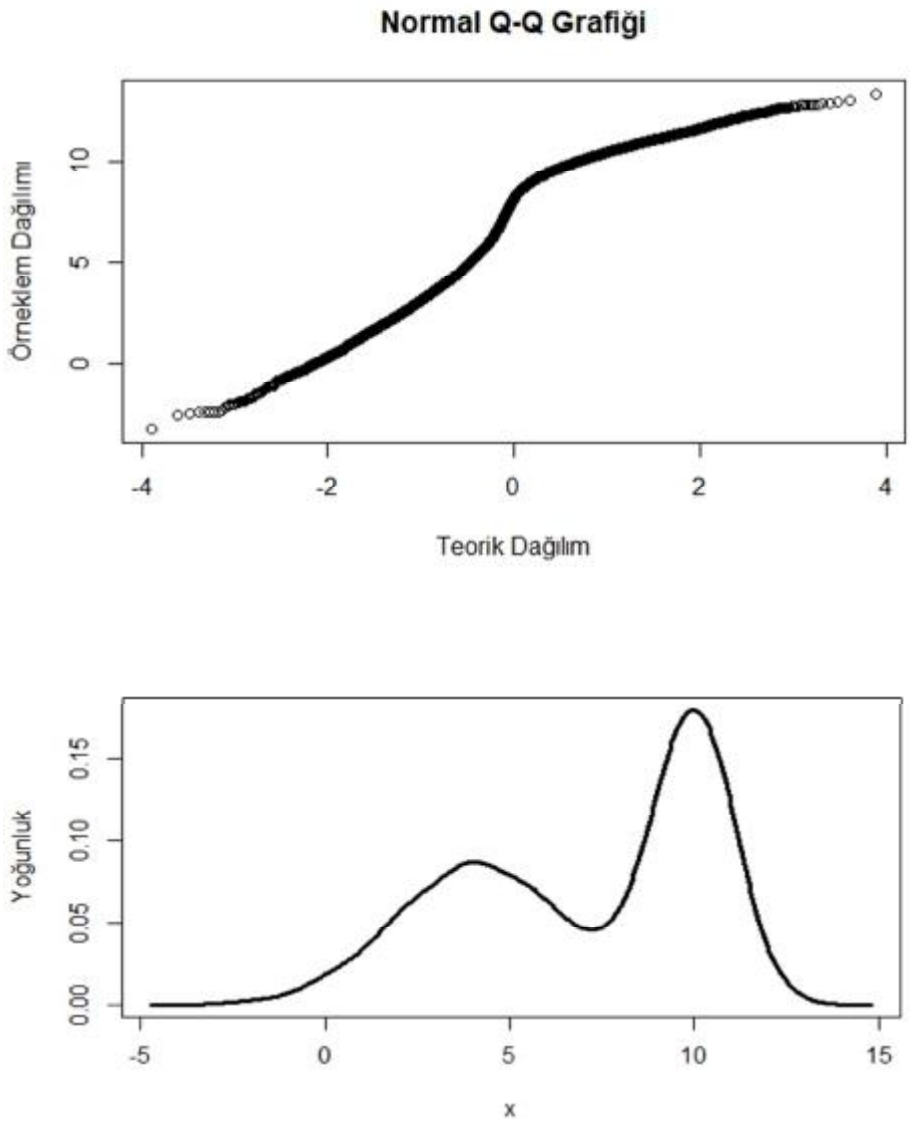
Şekil 3.12.'de görüldüğü üzere bu veri seti iki bileşenden oluşuyormuş gibi görülmektedir. Bunun sebebi, N~(5,2) ile N~(3,2) dağılımının ortak değerlerinin fazla olup tek bir dağılım gibi davranıyor olmasıdır



Şekil 3.10. %40'ı N~(4,1) ve %60'ı N~(7,2) karma dağılımına sahip 10000 sayının Q-Q ve yoğunluk grafiği



Şekil 3.11. %20'si N~(3,1), %50'si N~(10,2) ve %30'u N~(20,4) karma dağılımına sahip 10000 sayının Q-Q ve yoğunluk grafiği



Şekil 3.12. %20'si N~(3,2), %30'u N~(5,2) ve %50'si N~(10,1) karma dağılımına sahip 10000 sayının Q-Q ve yoğunluk grafiği

Karma dağılımların bileşen sayılarını belirlemede Q-Q ve yoğunluk grafikleri yeterli olmayacağı için, ek yöntemlere başvurulması gerekmektedir.

3.6.1.2. Akaike Bilgi Kriteri (AIC)

Özellikle bileşen sayısı k'yı doğru tahmin edebilmek için, veri setinin oluştuğu bileşenlerin birbirinden iyi bir şekilde ayrılmış olması ve veri setinin örneklem sayısının fazla olması gerekmektedir. Bileşen sayısı tahmininde Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Bayesci Bilgi Kriteri (BIC) en genel olarak kullanılan yöntemlerdir (McLachnan ve Peel, 2000). Bu bilgi kriterleri veri setine uyacak en iyi karma modeli seçebilmek için kullanılır (Çalış, 2005).

Karma dağılımlarda yapılan çalışmalar genellikle, tek boyutta karma normal dağılım ya da log-normal dağılımlar olarak yapılmıştır. Bir L modeli için olabilirlik fonksiyonu maksimize değeri, k ise tahmin edilmiş küme sayısı ise, $\mathrm{AIC}=2k - 2\ln(L)$ olarak ifade edilir (Akaike, 1974). Karma dağılımlarda bileşen sayısı tespit edilmek istendiği zaman AIC değerini minimum yapan değer dikkate alınır (Burnham ve Anderson, 1998). Farklı k değerlerindeki AIC kriteri karşılaştırıldığında düşük değerli olan model seçilmelidir (Yalta, 2011).

Yapılan bir takım çalışmalarda, AIC değerinin karma dağılım bileşen sayısı belirmede tutarsız davrandığı ve bileşen sayısını olduğundan daha büyük tespit ettiği ifade edilmiştir (Koehler ve Murphee, 1988).

3.6.1.3. Bayesci Bilgi Kriteri (BIC)

İstatistikte, Bayesian bilgi ölçütü (BIC) sonlu model kümeler arasında model seçimi için bir kriterdir. Bayesci bilgi kriteri, Schwarz tarafından geliştirilmiştir ve n gözlem sayısı olmak üzere (3.43) denklemiyle ifade edilir (Schwarz, 1978).

$$\mathrm{BIC}= - \ln(n)k - 2\ln(\hat{L}) \tag{3.43}$$

Maksimum olasılıkla aynı verilere uyan modelleri kıyaslarken, BIC değeri ne kadar küçük olursa uyum da o kadar iyi olur. AIC değerinin aksine, BIC değerinin normal karma dağılım modelinin bileşen sayısı tahmininde tutarlı sonuçlar verdiği ve iyi performans gösterdiği bulunmuştur (Roeder ve Wasserman, 1997). Özellikle büyük örneklemlerde en doğru modeli seçebilmesi sebebiyle yüksek bir geçerliliğe sahiptir (Schwarz, 1978).

Çizelge 3.6. Normal karma dağılımların BIC ölçütüne göre tahmin edilen bileşen sayıları

Karma Dağılım Parametresi	**BIC ile elde edilen k bileşen sayısı**
N~(3,1) %50 + N~(6,1) %50	2
N~(4,1) %40 + N~(7,2) %60	2
N~(3,1) %20 + N~(10,2) %50 + N~(20,4) %50	3
N~(3,2) %20 + N~(5,2) %30 + N~(10,1) %50	2
N~(5,1)%50 + N(5,3)%50	2
N~(3,2)%30 + N(4,2)%70	1

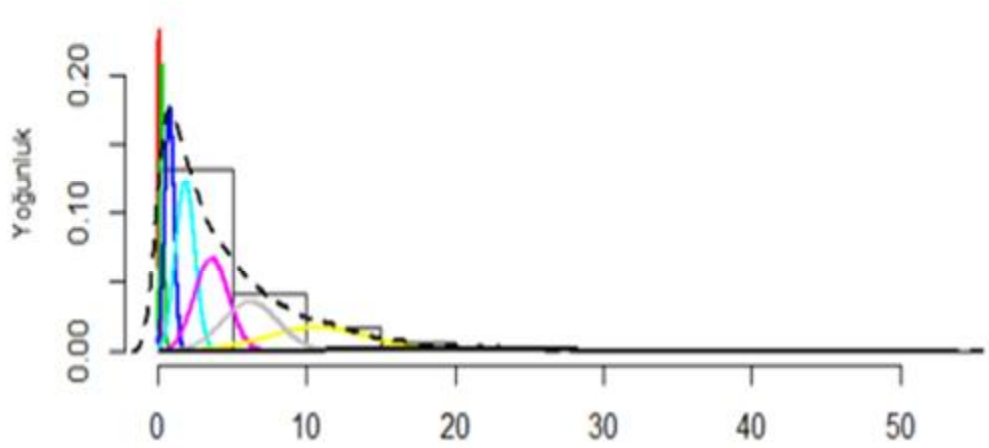
Çizelge 3.6'da görüldüğü üzere, bazı karma dağılımların bileşenleri doğru bulunabilirken, bazı bileşen değerleri yanlış bulunmuştur. Bunun sebebi, iki dağılımın birbirine yaklaştıkça tek bir dağılım gibi davranmasıdır. Bu sebeple tahmin edilen k bileşen sayısına bağlı olarak tahmin edilecek normal dağılım parametreleri, gerçek değerle ile Mann-Whitney U testiyle aynı kütleden gelip gelmediği araştırılmalıdır.

Kuyruk sistemlerinde karma veri setini oluşturan dağılımlar normal dağılımlardan oluşmuyor olabilir. BIC yöntemi en iyi karma normal dağılımlarda çalıştığı için, rasgele bağımsız dağılımlardan oluşmuş bir veri seti istatistiksel olarak normal karma dağılım şeklinde temsil edilebilir.

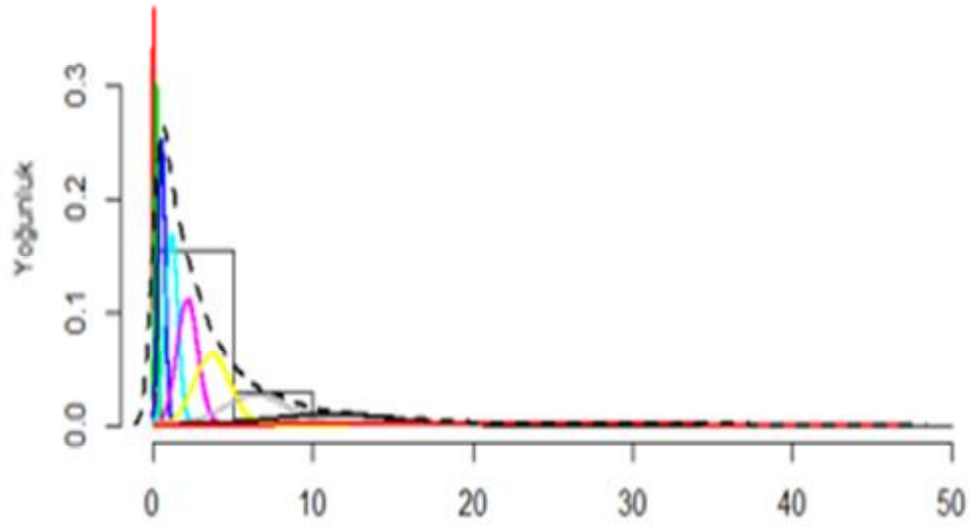
Veri setini oluşturan dağılımlar bilinmediği için parametre ve bileşen tahmini ayrıştırmak çok zordur. Bu sebeple veri seti bilinen hiçbir dağılıma uymuyorsa, normal dağılımların karmasından oluştuğu kabul edilerek BIC ölçütü ile k bileşen sayısı tahmini yapılabilir.

Çizelge 3.7. Üstel karma dağılımların BIC ölçütüne göre tahmin edilen bileşen sayıları

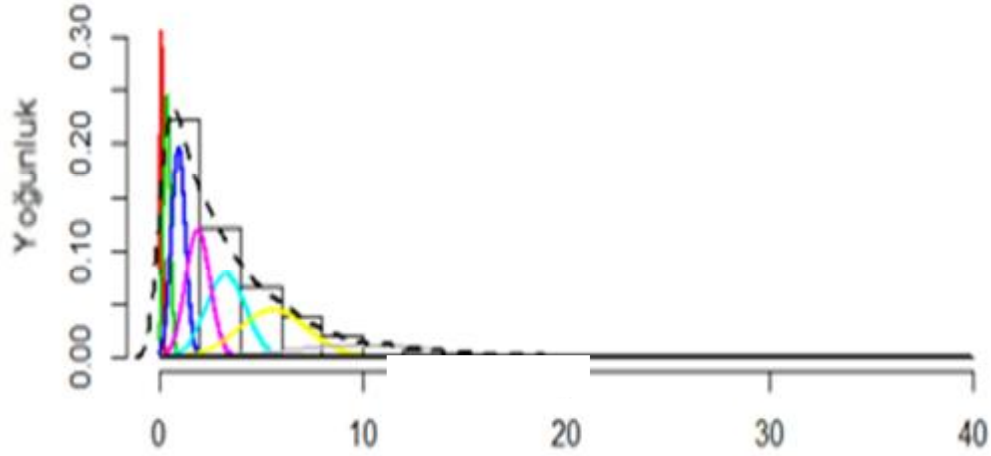
Karma Dağılım Parametresi	**BIC ile elde edilen k bileşen sayısı**
EXPO(2.4)%30 + EXPO(6)%70	8
EXPO(2)%60 + EXPO(6)%40	9
EXPO(3)%80 + EXPO(6)%20	8
EXPO(4)%50 + EXPO(6)%50	9



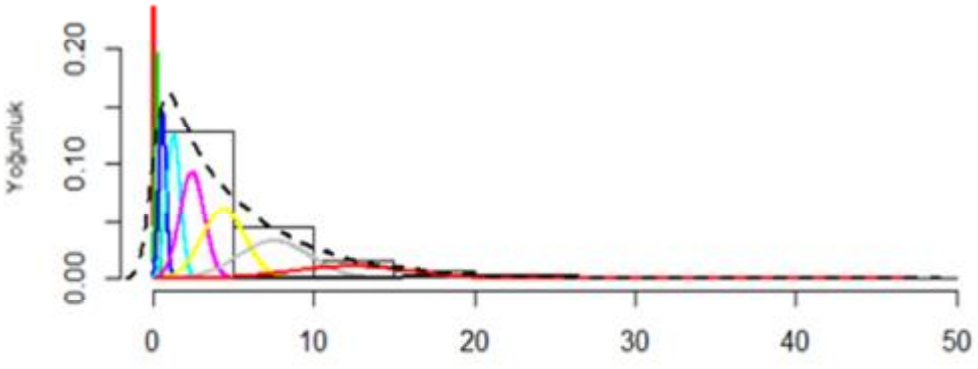
Şekil 3.13. %30'u EXPO(2.4) ve %70'i EXPO(6) oluşan karma dağılımın sekiz normal dağılım ile temsil edilmesi



Şekil 3.14. %60'ı EXPO(2) ve %40 'ı EXPO(6) oluşan karma dağılımı dokuz normal dağılım ile temsil edilmesi



Şekil 3.15. %80'i EXPO(3) ve %20'si EXPO(6) oluşan karma dağılımı sekiz normal dağılım ile temsil edilmesi



Şekil 3.16. %50'si EXPO(4) ve %50'si EXPO(6) oluşan karma dağılımı dokuz normal dağılım ile temsil edilmesi

Özellikle verilerin belirli bir aralığa yığıldığı üstel karma dağılımlar ampirik fonksiyon olarak tanımlanmak istendiğinde çıkan zorluklar, bu yöntem ile ortadan kaldırılabileceği düşünülmüştür. Bu kapsamda yapılan denemeler Araştırma Bulguları ve Tartışma bölümünde ayrıntılı ele alınacaktır.

Bundan sonraki aşama ise, belirlenen bileşen sayısına göre, veriyi oluşturan her bir dağılımın parametrelerinin tahmin edilmesidir.

3.6.2. Karma Dağılımlarda Parametre Tahmini

Bu bölümde karma dağılımlarda bileşen sayısı belirlendikten sonra yapılacak işlem olan parametre tahmin yöntemlerinden en çok olabilirlik ve EM algoritması yöntemleri ele alınacaktır.

Q-Q, P-P grafikleri, AIC ve BIC değerleri sonucunda belirlenen karma dağılımın k bileşen sayısına göre her bir bileşene ait parametrelerin tahmini yapılması gerekmektedir. Parametre tahmininde en çok kullanılan yöntemler en çok olabilirlik yöntemi ve beklenti maksimizasyonu (EM) algoritmasıdır.

3.6.2.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi (Maximum Likelihood-MLE)

Sonlu karma dağılım modellerinde parametre tahminin ilk denemelerinde en çok olabilirlik yöntemi ve momentler yöntemi kullanılmıştır (John, 1970). En çok olabilirlik yöntemi, tahmin edicileri elde etme yöntemleri arasında en popüler olan nokta tahmin yöntemlerinden biridir.

En çok olabilirlik yöntemi, belli bir örneklem değerlerinin gerçekleşme olasılığı maksimum yapan veri seti parametrelerini bulmaya çalışan bir algoritma olarak çalışır.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ parametrelerine sahip olduğundan bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x_i;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2), \quad -\infty < x_i < \infty, \quad i = 1,2,...,n$$

Dağılım ailesi olarak normal dağılıma uyduğu ve k bileşen sayısı tespit edilmiş ortalaması μ, varyansı σ^2 olan ve $x_1, x_2, ..., x_n$ rassal gözlemlerden oluşan bir veri setinin μ ve σ^2 parametreleri en çok olabilirlik yöntemiyle şu şekilde tahmin edilir.

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} p_i \mu_i \tag{3.44}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i((\mu_i-\mu))^2 + \sigma_i^2) \tag{3.45}$$

formülleriyle hesaplanır.

3.6.2.2. Beklenti maksimizasyon (EM) Algoritması

EM algoritması, 1977 yılında ilk olarak Dempster ve arkadaşları tarafından öne atılmış bir yöntemdir (Dempster ve ark., 1977). Özellikle son 20 yıldır sonlu karma dağılım model parametre tahmin etmede yoğun olarak kullanılmaya başlanmıştır (Lakshmi ve Vaidyanathan, 2016). Verinin genel olarak belli bir olasılık dağılımların karışımlarından geldiği kabul edilir ve model yapısının ve parametrelerinin belirlenmesi için bu algoritma kullanılır. Beklenti Maksimizasyonu (EM) algoritması, kapalı formlu bir çözüm mevcut değilse, olasılık denklemi için bir çözüm elde etmek için uygun bir yol sağlar. Bundan dolayı, EM algoritması, parametrelerin tahmin edilmesi için dağılımların karıştırılması durumunda kullanılabilir. (Wengrzik, 2012).

Basit olarak ifade etmek gerekirse; EM algoritması, parametreler için başlangıç değer spesifikasyonuna dayanan en çok olabilirlik tahminlerini ve karma oranlarını iteratif bir şekilde hesaplayarak çalışır. Her nesne bir kümeye belli bir olasılık dağılımı ağırlığına göre atanır ve oluşturulan bu kümeler arasında kesin sınırlar yoktur. Bu ağırlıklı ölçümlere göre yeni ortalamalar hesaplanır. Bu algoritmanın performansı parametrelerin başlangıç değerlerine yüksek şekilde duyarlıdır (McLachlan ve Basford, 1988). Başlangıç değerlerinde yapılan kötü seçimler ortaya çıkan parametre tahminlerini önemli ölçüde etkileyebilir. Ayrıca EM algoritması iteratif bir şekilde çalıştığı için, bazı durumlarda bir maksimum değeri yerine yerel minimum değerine yakınsayabilir. Bu sınırlamalara rağmen EM algoritması karma modellerde parametre tahmini için kullanılan en popüler yöntemdir. Bu çalışmada EM algoritmasının tercih edilmesinin sebebi ise, önceki yapılan çalışmalarda karma dağılım parametre tahmini yapan momentler yöntemi ve en çok olabilirlik yöntemine göre parametre tahminlerini çok daha başarılı yapmasıdır (Açıkgöz, 2007).

E-adımı olarak dağılımlar için merkez çap değerleri gibi bir tahmini parametre vektörü ile başlanır ve M-adımı olarak bu merkezler için iteratif bir

şekilde iyileştirme yapılır. Algoritma hızlı bir şekilde tamamlanır fakat her zaman en ideal çözüme ulaşmayabilir (Özdemir, 2015).

EM algoritmasının E-adımı olarak herhangi bir x değeri için, bu kümelere ait olma olasılığının hesaplanması gerekmektedir.

E-Adımı:

$$\Pr[p_1 | x_i] = \frac{\Pr[x_i | p_1]\Pr[p_1]}{\Pr[x_i]} = \frac{\Pr[p_1]}{\Pr[x_i]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s_1} e^{-\frac{(x_i - m_1)^2}{2s_1^2}} \quad (3.46)$$

$$\Pr[p_2 | x_i] = \frac{\Pr[x_i | p_2]\Pr[p_2]}{\Pr[x_i]} = \frac{\Pr[p_2]}{\Pr[x_i]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s_2} e^{-\frac{(x_i - m_2)^2}{2s_2^2}} \quad (3.47)$$

$$p_i = \frac{\Pr[p_1 | x_i]}{\Pr[p_1 | x_i] + \Pr[p_2 | x_i]} \quad (3.48$$

M-adımı olarak hesaplanan p_i değerleri göre parametreler p_{i+1} yeni adım değeri ile tekrardan hesaplanır ve işlemler iteratif olarak tekrar edilir. Algoritma olabilirlik fonksiyonunu maksimize etmeye çalışır.

M-Adımı:

$$\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \qquad \mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (1 - p_i) x_i}{\sum_{i=1}^{n} (1 - p_i)}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \qquad \sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (1 - p_i)(x_i - \mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n} (1 - p_i)}$$

$$P(\pi_1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n}$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde normal karma dağılımların performansı kesin çözümü olan M/M/1 ve M/G/1 kuyruk sistemlerinde test edilmiştir.

Tahmin edilen bileşen sayısı ve parametrelerin doğruluğunu tespit edebilmek açısından 10000 adet sayı belirli bir sistematik içerisinde tüm durumlar için benzetim programında üretilmiştir. İşlem süresinin normal karma dağılım olduğu kuyruk sistemi için, normal karma dağılımın Mahalanobis sayısı 1.5, 2, 2.5 ve 3; işlem süresinin üstel karma dağılım olduğu kuyruk sistemi için ise, üstel karma dağılımın μ_1/μ_2 oranı 1.5, 2, 2.5, 3 olacak şekilde tüm karma oranlarında sistemin durağan durum olması gerektiği dikkate alınarak düzenlemiştir.

Uygulamalarda işlem süresi hakkında hiçbir bilgiye sahip olunmadığı varsayılmıştır ve veriler χ^2 testine göre herhangi bir bilinen teorik dağılıma uyup uymadığı test edilmiştir. Bilinen bir teorik dağılıma uymadığı durumlarda ampirik fonksiyon oluşturulmuş ve benzetim programında oluşturulan ampirik dağılıma uygun sayılar üretilmiştir. χ^2 testi sonucunda test verisinin bilinen bir dağılıma uyduğu durumlarda ise tespit edilen dağılımlar kullanılmıştır. Karma dağılım yaklaşımında ise, işlem sürelerini oluşturduğu kabul edilen test verilerinin karma normal dağılımdan geldiği kabul edilerek BIC değerlerine bakılarak bileşen sayısı tahmini yapılmıştır. Tahmin edilen bileşen sayısına göre, EM algoritması çalıştırılmıştır ve her bir bileşenin parametre tahmini R programında yapılmıştır. Tahmin edilen normal karma dağılım benzetim programı ile üretilmiştir ve test verilerini temsil ettiği Mann-Whitney U ile test edilmiştir.

Karma normal dağılımlarda oluşan durumlarda, ampirik dağılım verilerinin geçerliliğini sağlamak için 50 kategoriye ayırmak yeterli olurken, dağılımların üstel karma dağılımlardan oluştuğu durumlarda 300 kategoriye ayırmak zorunda kalınmıştır. Bunun sebebi, üstel dağılımın belirli bir aralık içerisine verilerin yığılmasıdır. Üretilen ampirik dağılım ve normal karma dağılım verilerinin

ortalama ve standart sapma değerleri hesaplanarak M/G/1 kuyruk sistemine çevrilerek performans kriteri olarak belirlenen kuyrukta bekleme süresi W_q dakika cinsinden hesaplanmış ve test verileri ile elde edilen teorik sonuçlar ile ampirik fonksiyon ve normal karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen değerler karşılaştırılarak % bağıl hata hesaplanmıştır.

4.1. İşlem Süresinin Normal Karma Dağılım Olduğu Durumlar

Bu bölümde kesin çözümü olan, gelişler arası sürelerin üstel ve işlem süresi normal karma dağılımlardan oluşturulmuş kuyruk modelinin performansı analiz edilecektir.

Sistemin performans parametreleri; işlem süresi üstel dağılım dışında bir dağılıma uyduğu durumlarda M/G/1 kuyruk sistemi için Pollaczek-Khintchine formülleri ile hesaplanır.

Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısının beklenen değeri

$$L_q = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

Sistemdeki ortalama müşteri sayısının beklenen değeri

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + L_q$$

Müşterinin sistemde bulunduğu ortalama zamanın beklenen değeri

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

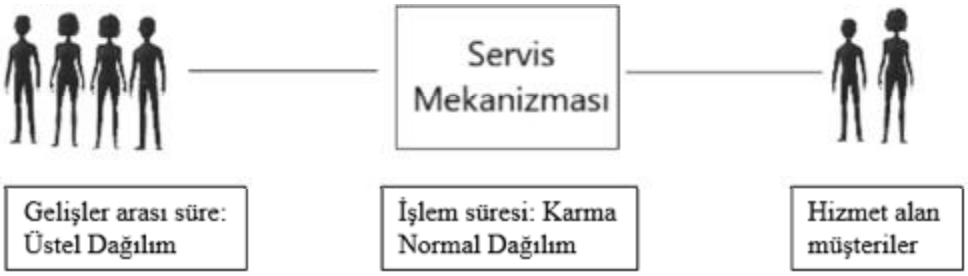
Müşterinin kuyrukta bulunduğu zamanın beklenen değeri

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Bir dağılımın, parametreleri bilinen k tane normal dağılımlar karmasından oluştuğu biliniyorsa, ortalama değeri ve varyansı en çok olabilirlik yöntemi ile hesaplanabilir

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} p_i \mu_i \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i ((\mu_i - \mu)^2 + \sigma_i^2)$$

.



Şekil 4.1. İşlem süresinin karma normal dağılım olduğu bir kuyruk sistemi

4.1.1. Mahalanobis Uzaklığının 1.5 Olduğu Durum

M/G/1 kuyruk sisteminin ilk durumunda işlem süresini oluşturan normal karma dağılımın Mahalanobis uzaklığı $\Delta = 1.5$ olması durumunda, ampirik dağılım ve normal karma dağılıma yaklaşımlarıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik olarak hesaplanan kuyrukta bekleme sürelerine göre performansı incelenmiştir.

Çizelge 4.1. D = 1.5 olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları

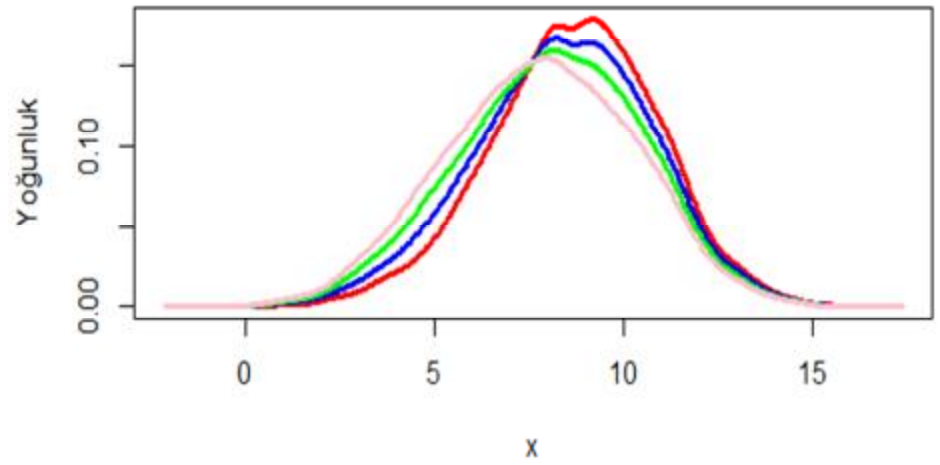
	Gelişler arası süre: EXPO(10)	**TEORİK**	c^2	**SAF**	**KARMA**
	İşlem Süresi D = 1.5	$W_q(dk)$	***p < 0.5 = Ret***	$W_q(dk)$	$W_q(dk)$
1	N~(6,2) %10 + N~(9,2) %90	31.14	Ampirik	30.68	30.67
2	N~(6,2) %20 + N~(9,2) %80	23.74	Ampirik	23.3	23.2
3	N~(6,2) %30 + N~(9,2) %70	18.82	Ampirik	18.51	18.47
4	N~(6,2) %40 + N~(9,2) %60	15.23	Ampirik	15.07	15.07
5	N~(6,2) %50 + N~(9,2) %50	12.5	Ampirik	12.37	12.36
6	N~(6,2) %60 + N~(9,2) %40	10.36	Ampirik	10.27	10.26
7	N~(6,2) %70 + N~(9,2) %30	8.63	Ampirik	8.52	8.51
8	N~(6,2) %80 + N~(9,2) %20	7.21	Ampirik	7.13	7.11
9	N~(6,2) %90 + N~(9,2) %10	6.01	Ampirik	5.99	5.97

N~(6,2) %10 + N~(9,2) veri seti için oluşturulan ampirik dağılımlar EK-1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1.'de görüldüğü üzere; c^2 testi sonucunda bilinen hiçbir saf dağılıma uymadığı görülmüştür. İki normal dağılımın bileşimin yine bir normal

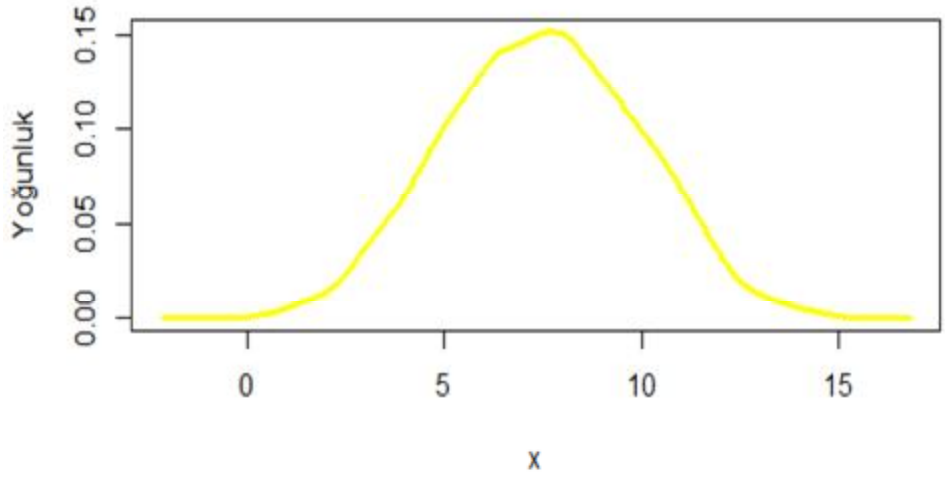
dağılım olduğu bilinmesine rağmen, veri setinin büyüklüğünden dolayı c^2 testi red bölgesinde kalmıştır ve ampirik dağılım fonksiyonu yazılmıştır.

Çizelge 4.1.'de "Teorik" sütunu M/G/1 kuyruk sistemine göre çözülmüş kuyrukta bekleme süresini, "c^2" sütunu, c^2 testine göre veri setinin bilinen bir dağılıma uyup uymadığı bilgisi, "Saf" sütunu, c^2 testi sonucunda seçilen dağılım ya da ampirik fonksiyona bağlı olarak elde edilen M/G/1 kuyruk sistemine göre çözülmüş kuyrukta ortalama bekleme süresini, "Karma" sütunu ise, veri setine normal karma dağılımlar yaklaşımı ile bileşen sayısı ve parametre tahmini yapıldıktan sonra elde edilen verilerin ortalama ve standart sapma değerleri ile M/G/1 kuyruk sistemine göre çözülmüş kuyrukta ortalama bekleme süresini göstermektedir.



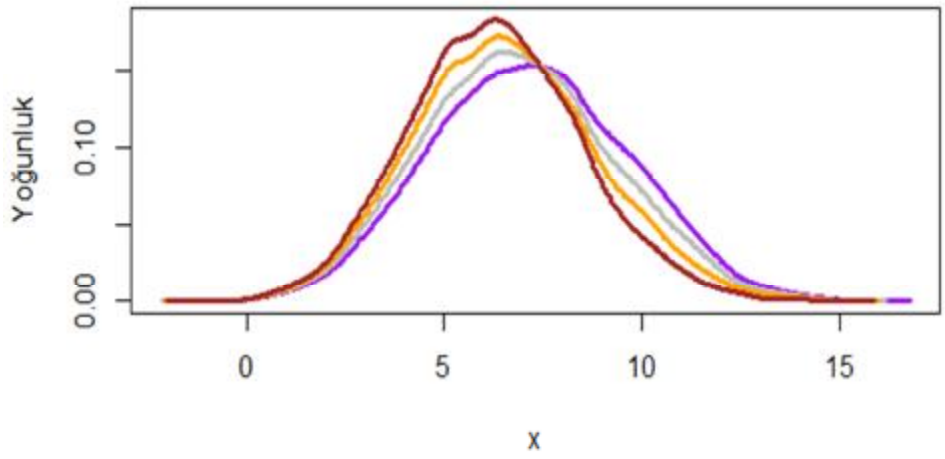
N~(6,2) %10 + N~(9,2) %90: Kırmızı N~(6,2) %20 + N~(9,2) %80: Mavi N~(6,2) %30 + N~(9,2) %70: Yeşil N~(6,2) %40 + N~(9,2) %60: Pembe

Şekil 4.2. D = 1.5 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 1



N~(6,2) %50 + N~(9,2) %50: Sarı

Şekil 4.3. D = 1.5 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 2



N~(6,2) %60 + N~(9,2) %40: Mor N~(6,2) %70 + N~(9,2) %30: Gri
N~(6,2) %80 + N~(9,2) %20: Turuncu N~(6,2) %90 + N~(9,2) %10: Kahverengi
Şekil 4.4. D = 1.5 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 3

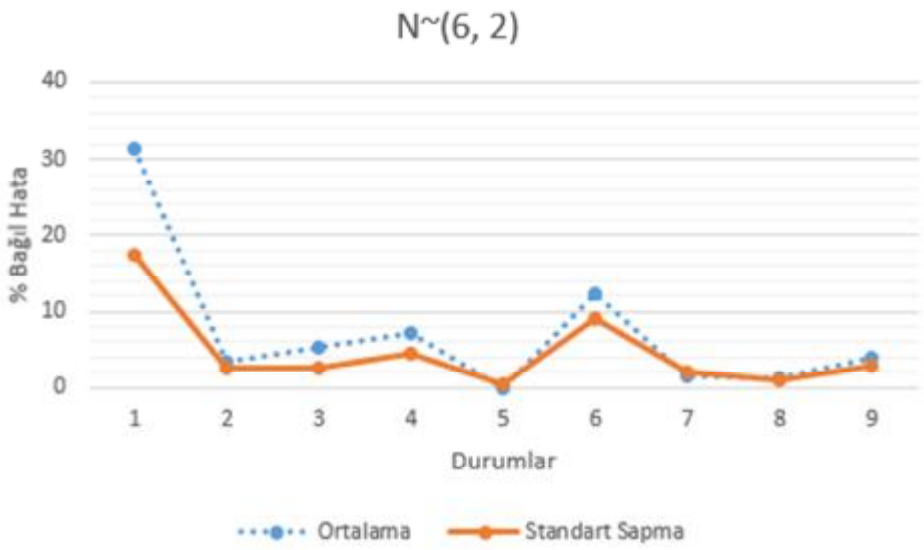
Bu uygulamada N~(6, 2) dağılımı ile N~(9, 2) dağılımından farklı oranlarda sayılar üretilmiştir. Test verilerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları incelenmiştir. Karma dağılım karakterinin en yüksek olduğu %50'sinin N~(6, 2) ve %50'sinin N~(9, 2) oluştuğu durumda dahi, Mahalanobis uzaklığı 1'e yakın olduğu için karma olasılık yoğunluk fonksiyonu net şekilde görülememektedir fakat geniş bir tepe oluşması nedeniyle verilerin karma dağılımlar yaklaşımı düşünülebilir.

Çizelge 4.2. $D = 1.5$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler

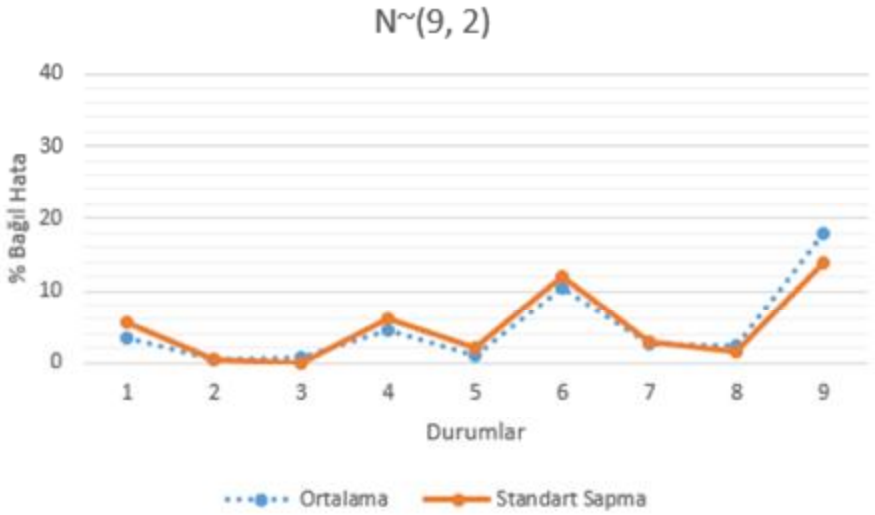
	İşlem Süresi D = 1.5	***k***	**TAHMİN EDİLEN PARAMETRELER**	**TOPLAM PARAMETRELER**
1	N~(6,2) %10 + N~(9,2) %90	2	N~(7.88, 2.35) %43.84 + N~(9.32, 1.89) %56.16	N~(8.68, 2.22)
2	N~(6,2) %20 + N~(9,2) %80	2	N~(5.80, 1.95) %18.61 + N~(8.96, 2.01) %81.38	N~(8.37, 2.34)
3	N~(6,2) %30 + N~(9,2) %70	2	N~(5.68, 1.87) %26.32 + N~(8.93, 2) %73.68	N~(8.07, 2.43)
4	N~(6,2) %40 + N~(9,2) %60	2	N~(9.40, 1.88) %45.5 + N~(6.43, 2.09) %54.5	N~(7.78, 2.51)
5	N~(6,2) %50 + N~(9,2) %50	2	N~(6, 1.99) %51.9 + N~(9.08, 1.96) %48.1	N~(7.48, 2.5)
6	N~(6,2) %60 + N~(9,2) %40	2	N~(5.26, 1.82) %31.52 + N~(8.07, 2.24) %68.48	N~(7.18, 2.48)
7	N~(6,2) %70 + N~(9,2) %30	2	N~(6.1, 2.04) %75.18 + N~(9.23, 1.94) %24.82	N~(6.87, 2.42)
8	N~(6,2) %80 + N~(9,2) %20	2	N~(5.93, 1.98) %77.28 + N~(8.78, 2.03) %22.72	N~(6.57, 2.32)
9	N~(6,2) %90 + N~(9,2) %10	2	N~(5.76, 1.94) %67.75 + N~(7.39, 2.28) %32.25	N~(6.28, 2.19)

Çizelge 4.2.'de test verileri için tahmin edilen bileşen sayısı, k, EM algoritması ile tahmin edilen parametreler ve tahmin edilen parametrelere göre en çok olabilirlik yöntemi ile hesaplanmış toplam parametreler verilmiştir.

Test verileri ile tahmin edilen ortalama ve standart sapma değerlerinin % kaç oranında bağıl hata ile tahmin edildiği Şekil 4.5. ve Şekil 4.6.'da gösterilmiştir.



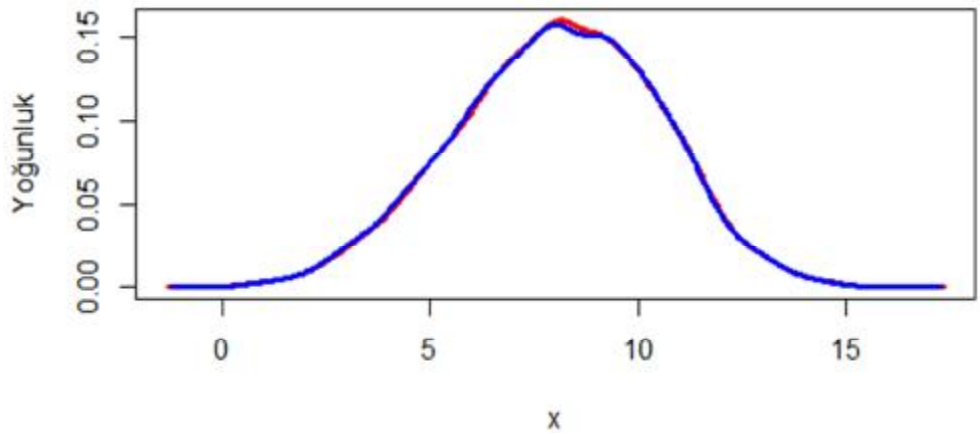
Şekil 4.5. $D=1.5$ durumunda N~(6, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları



Şekil 4.6. $D=1.5$ durumunda N~(9, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları

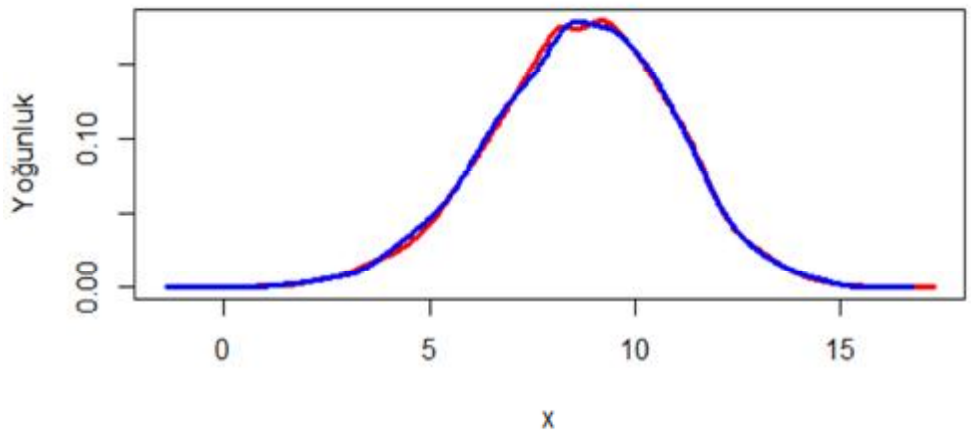
$D=1.5$ olduğu pek çok farklı karma oranlarında, tahmin edilen parametreler gerçek değerleri yansıtmamıştır fakat Mann-Whitney U testi sonucunda tahmin edilen parametreler ile test verilerin aynı kitleden geldiği hipotezi kabul edilmiştir. Tahmin edilen parametrelerin test verilerinin parametrelerine benzer olmamasının sebebi, $D=1.5$ olması nedeniyle iki normal dağılımın birbirine yakın olması ve iç içe geçen verilerin fazla olmasıdır. $D=1.5$ olduğu durumda iki normal dağılım birbirinden tam anlamıyla ayrılıp belirgin bir karma dağılım yapısı oluşturamamaktadır. Fakat yine de BIC testi sonucunda tüm durumlar için $k=2$ olarak tespit edilmiş ve bu bileşen sayısına göre EM algoritması uygulanmıştır.

%30'u N~(6,2) ve %70'i N~(9,2) durumu için tahmin edilen %26.32'si N~(5.68, 1.87) ve %73.68'i N~(8.93, 2) normal dağılımlarından oluşturulmuş karma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu Şekil 4.7.'de verilmiştir.



Şekil 4.7. %30'u N~(6,2) ve %70'i N~(9,2) (kırmızı) ve tahmin edilen %26.32'u N~(5.68, 1.87) ve %73.68'i N~(8.93, 2) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları

%10'u N~(6,2) ve %90'ı N~(9,2) karma dağılımı için ise tahmin edilen %43.84'ü N~(7.88, 2.35) ve %56.16'sının N~(9.32, 1.89) normal dağılımdan oluştuğu karma dağılımı olasılık yoğunluk grafikleri Şekil 4.8.'de görülmektedir.



Şekil 4.8. %10'u N~(6,2) ve %90'ı N~(9,2) (kırmızı) ve tahmin edilen %43.84'ü N~(7.88, 2.35) ve %56.16'sı N~(9.32, 1.89) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları

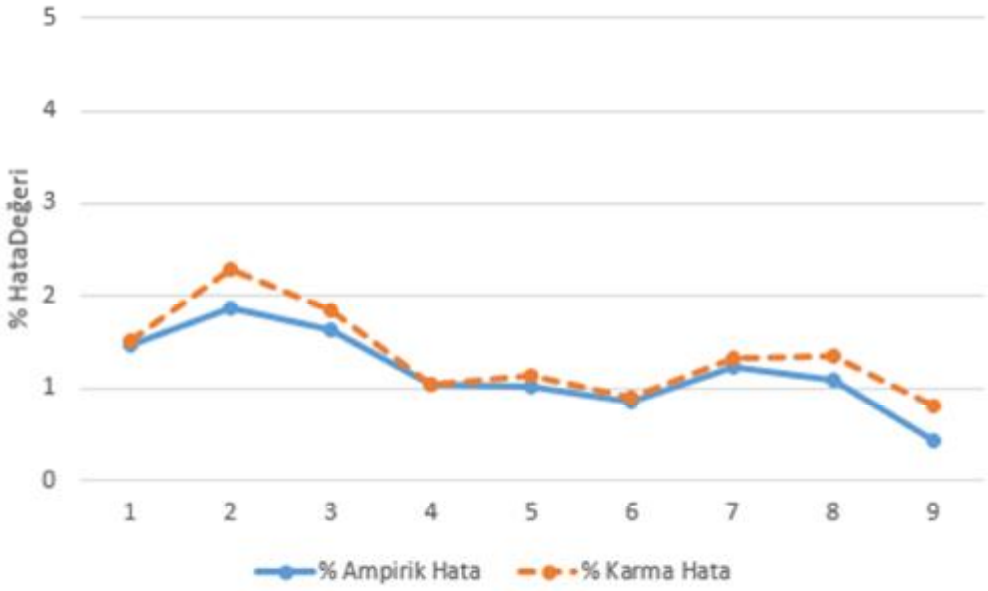
Çizelge 4.3'te görüldüğü gibi, Mann-Whitney U testine göre, hem 50 kategoriye bölünüp oluşturulan ampirik dağılımlar hem de tahmin edilen karma dağılımlar üretilen verileri $p > 0.5$ anlam düzeyinde temsil ettiği görülmüştür.

Çizelge 4.3. İşlem süresi $D=1.5$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması

	İşlem Süresi D = 1.5	**Mann-Whitney U Saf**	**Mann-Whitney U Karma**
1	N~(6,2) %10 + N~(9,2) %90	0.91	0.5
2	N~(6,2) %20 + N~(9,2) %80	0.88	0.62
3	N~(6,2) %30 + N~(9,2) %70	0.86	0.57
4	N~(6,2) %40 + N~(9,2) %60	0.93	0.65
5	N~(6,2) %50 + N~(9,2) %50	0.91	0.5
6	N~(6,2) %60 + N~(9,2) %40	0.89	0.61
7	N~(6,2) %70 + N~(9,2) %30	0.81	0.53
8	N~(6,2) %80 + N~(9,2) %20	0.9	0.51
9	N~(6,2) %90 + N~(9,2) %10	0.89	0.62

Çizelge 4.4. D = 1.5 olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri

DURUM	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
SAF	1.47	1.87	1.64	1.04	1.01	0.85	1.22	1.09	0.43
KARMA	1.51	2.29	1.85	1.04	1.14	0.9	1.33	1.35	0.79



Şekil 4.9. $D=1.5$ olduğu durumlar için % hata değerleri

İşlem süresi farklı oranlarda, $D=1.5$ olan iki normal dağılımdan oluşan bir M/G/1 kuyruk sistemi analiz edilmiştir ve hesaplanan teorik sonuçlarla oluşturulan ampirik ve normal karma dağılım yaklaşımına bağlı olarak elde edilen sonuçlar % hata cinsinden karşılaştırılmıştır.

Tüm durumlarda ampirik dağılımlar yaklaşımı ile elde edilen sonuçların normal karma dağılımlar yaklaşımı ile elde edilen sonuçlardan teorik sonuca daha yakın hesaplandığı gözlemlenmiştir. Bunun sebebi D'nın 1'e yakın olduğu durumlarda iki normal dağılımın birbirine benzer parametreler taşıması nedeniyle ortak değerlerinin fazla olmasıyla karma dağılım karakterini tam olarak yansıtamaması ve tek bir dağılım gibi davranma eğilimidir.

Fakat iki yöntem arasında % hata oranları teorik sonuçlar ile karşılaştırıldığında birbirine çok yakındır ve hata yüzdeleri düşüktür. Bu sebeple ampirik dağılım yaklaşımı ile normal karma dağılımlar yaklaşımı arasında net bir seçim yapmak zordur. Ayrıca ampirik dağılımın Mann-Whitney U değeri 0.8'den

büyük olacak şekilde 50 kategoriye ayrılması da ampirik dağılımın teorik sonuca yaklaşmasını sağlamıştır.

4.1.2. Mahalanobis Uzaklığının 2 Olduğu Durum

İşlem süresinin normal karma dağılımlardan oluştuğu kuyruk sisteminin ikinci durumunda işlem süresini oluşturan normal karma dağılımın Mahalanobis uzaklığı $D = 2$ olması durumunda, ampirik dağılım ve normal karma dağılıma yaklaşımlarıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik olarak hesaplanan kuyrukta bekleme sürelerine göre performansı incelenmiştir.

Çizelge 4.5. $D = 2$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları

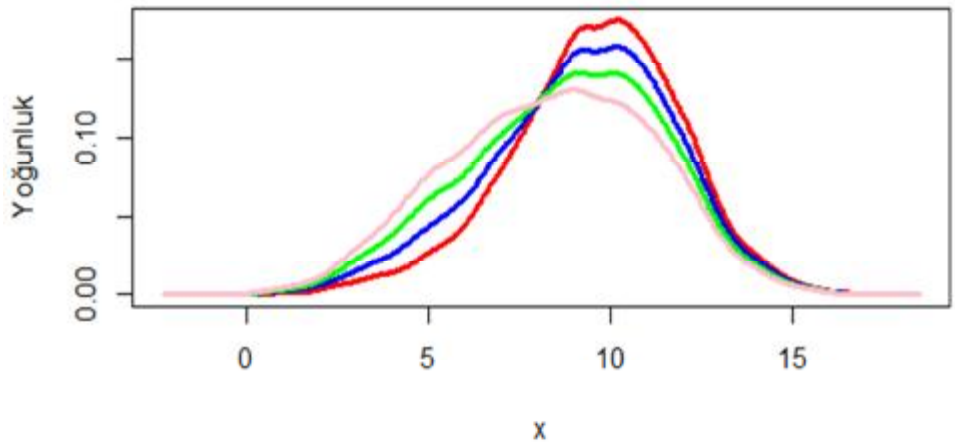
	Gelişler arası süre: EXPO(10)	**TEORİK**	c^2	**SAF**	**KARMA**
	İşlem Süresi $D = 2$	$W_q(dk)$	***p < 0.5 = Ret***	$W_q(dk)$	$W_q(dk)$
1	N~(6,2)%10 + N~(10,2) %90	121.97	Ampirik	117.9	117.6
2	N~(6,2)%20 + N~(10,2) %80	56.98	Ampirik	55.05	55.09
3	N~(6,2)%30 + N~(10,2) %70	35.31	Ampirik	34.53	34.57
4	N~(6,2)%40 + N~(10,2) %60	24.49	Ampirik	24.17	24.16
5	N~(6,2)%50 + N~(10,2) %50	17.74	Ampirik	17.79	17.72
6	N~(6,2)%60 + N~(10,2) %40	13.62	Ampirik	13.55	13.53
7	N~(6,2)%70 + N~(10,2) %30	10.57	Ampirik	10.48	10.42
8	N~(6,2)%80 + N~(10,2) %20	8.24	Ampirik	8.17	8.13
9	N~(6,2)%90 + N~(10,2) %10	6.44	Ampirik	6.42	6.47

N~(6,2) + N~(10,2) veri seti için oluşturulan ampirik dağılımlar EK-2'de verilmiştir.

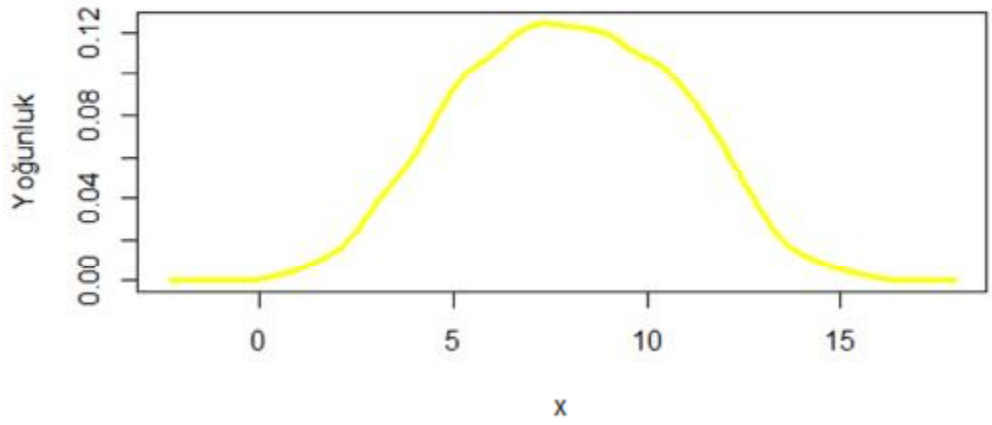
$D = 1.5$ durumuna benzer şekilde $D = 2$ olan tüm durumlarda da c^2 testi sonucunda ampirik dağılım oluşturulması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Oluşturan

ampirik dağılım ve normal karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme süreleri Çizelge 4.5.'te gösterilmiştir.

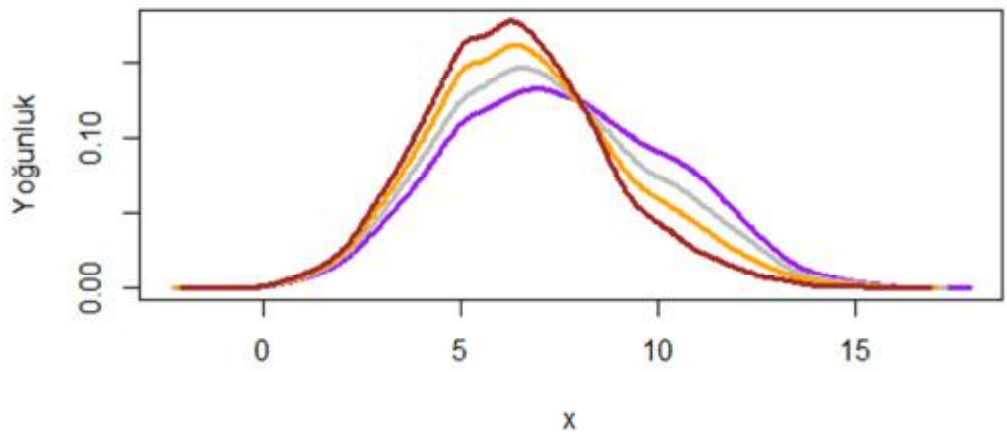
Özellikle Şekil 4.11'de görüldüğü üzere, $D=2$ olması nedeniyle normal dağılımlar birbirinden tam anlamıyla ayrılamamıştır. Fakat bu durum $D=1.5$ durumundaki %50'si N~(6, 2) ve %50'si N~(9, 2) dağılımlarından oluşmuş karma dağılımın yoğunluk fonksiyonu ile karşılaştırıldığında tepe noktasının daha genişlediği görülebilir. Böylece, karma dağılımın oluşturan normal dağılımların birbirinden uzaklaşmaya başladığını tespit edilebilir.



N~(6,2) %10 + N~(10,2) %90: Kırmızı N~(6,2) %20 + N~(10,2) %80: Mavi
N~(6,2) %30 + N~(10,2) %70: Yeşil N~(6,2) %40 + N~(10,2) %60: Pembe
Şekil 4.10. D = 2 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 1



N~(6,2) %50 + N~(10,2) %50: Sarı
Şekil 4.11. D = 2 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları – 2



N~(6,2) %60 + N~(10,2) %40: Mor N~(6,2) %70 + N~(10,2) %30: Gri
N~(6,2) %80 + N~(10,2) %20: Turuncu N~(6,2) %90 + N~(10,2) %10: Kahverengi
Şekil 4.12. D = 2 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 3

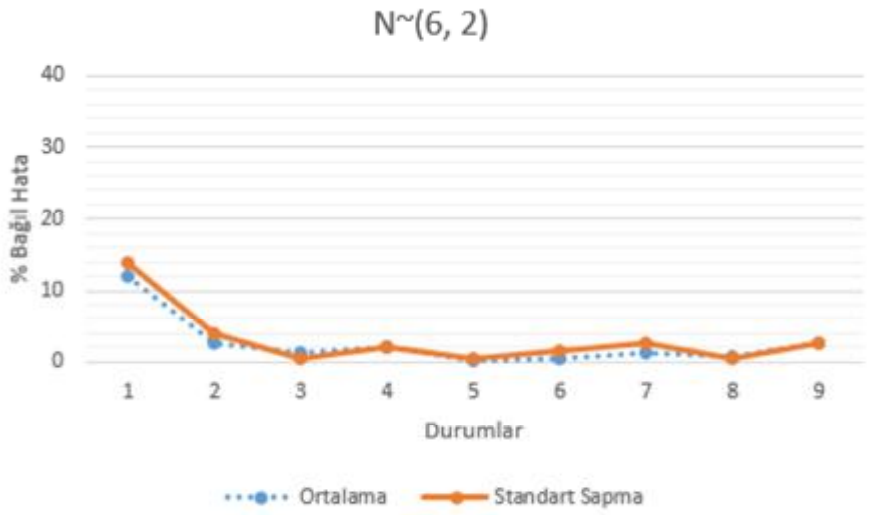
Çizelge 4.6. $D = 2$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler

	İşlem Süresi $D = 2$	k	TAHMİN EDİLEN PARAMETRELER	TOPLAM PARAMETRELER
1	N~(6, 2)%10 + N~(10, 2) %90	2	N~(6.72, 2.28) %15.22 + N~(10.10, 1.98) %84.78	N~(9.58, 2.36)
2	N~(6, 2)%20 + N~(10, 2) %80	2	N~(6.16, 2.08) %22.28 + N~(10.04, 1.99) %77.74	N~(9.17, 2.57)
3	N~(6, 2)%30 + N~(10, 2) %70	2	N~(6.07, 2.01) %31.95 + N~(10.05, 1.98) %68.05	N~(8.77, 2.72)
4	N~(6, 2)%40 + N~(10, 2) %60	2	N~(6.13, 2.04) %43.39 + N~(10.11,1.96) %56.61	N~(8.38, 2.8)
5	N~(6, 2)%50 + N~(10, 2) %50	2	N~(6.02, 1.99) %51.05 + N~(10.02, 2.01) %48.95	N~(7.97, 2.82)
6	N~(6, 2)%60 + N~(10, 2) %40	2	N~(6.03, 2.03) %61.06 + N~(10.02, 2) %38.94	N~(7.58, 2.8)
7	N~(6, 2)%70 + N~(10, 2) %30	2	N~(6.07, 2.05) %72.85 + N~(10.14, 1.96) %27.15	N~(7.17, 2.71)
8	N~(6, 2)%80 + N~(10, 2) %20	2	N~(5.96, 1.99) %78.94 + N~(9.84, 2.04) %21.06	N~(6.77, 2.55)
9	N~(6, 2)%90 + N~(9, 2) %10	2	N~(5.84, 1.95)%79.21 + N~(8.57, 2.4) %20.79	N~(6.40, 2.33)

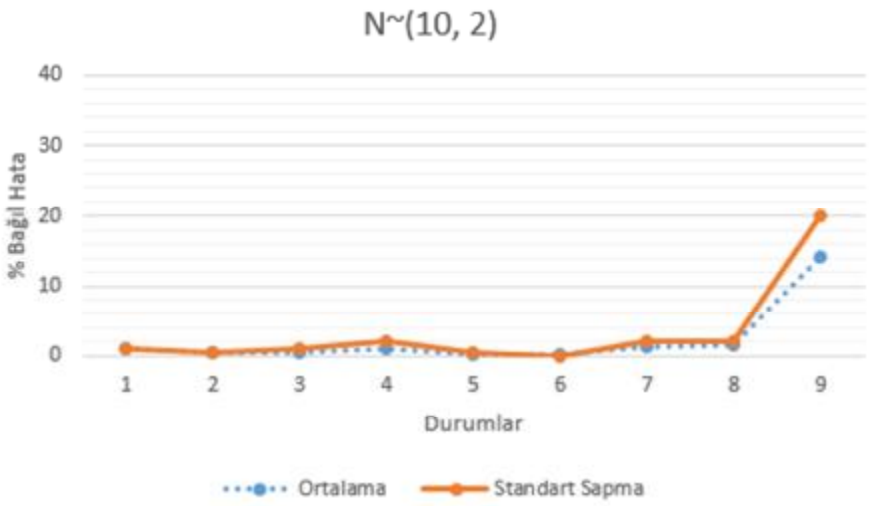
Veriler tam anlamıyla karma dağılım olarak davranamamalarına rağmen, karma dağılım karakterinin yüksek olduğu yerlerde yapılan parametre tahmini bağıl hataları daha düşük olmuştur. BIC testi sonucunda bileşen sayıları doğru ve $k = 2$ olarak tahmin edilmiştir.

Karma dağılımda tahmin edilen parametrelerin bağıl hatası yüksek olduğu durumlarda da Mann-Whitney U testine ile aynı kütleden geldiği hipotezi ispatlanmıştır.

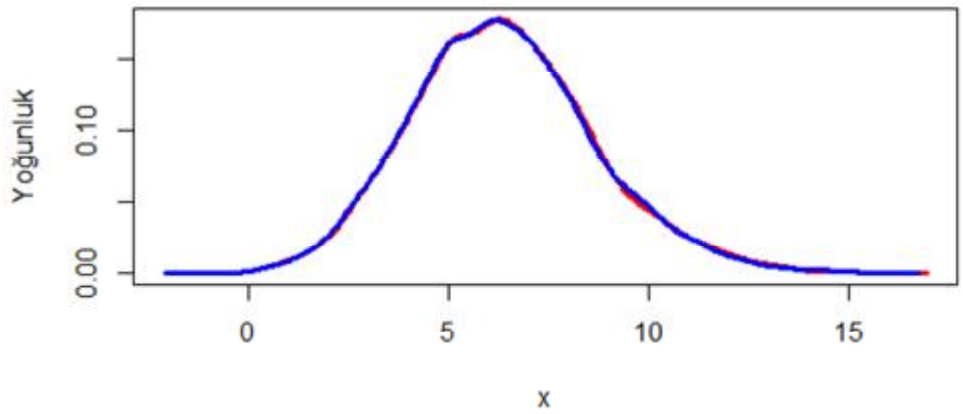
Test verileri ile tahmin edilen dağılımlardan bazılarının yoğunluk fonksiyonu Şekil 4.15. ve Şekil 4.16.'da gösterilmiştir.



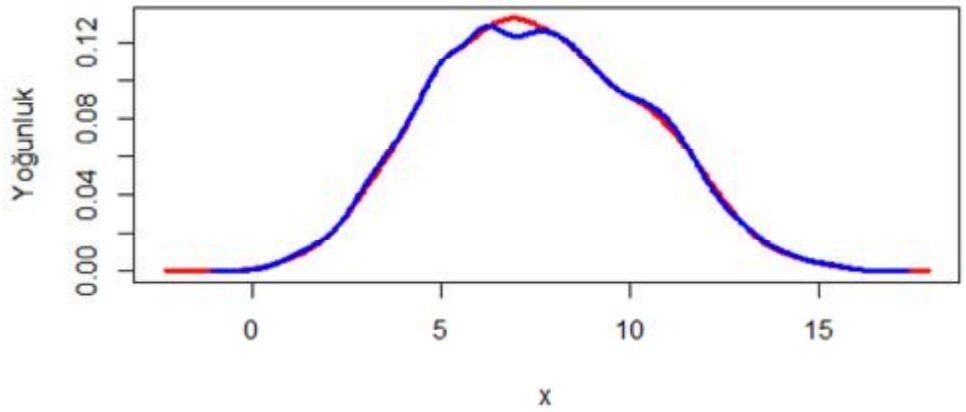
Şekil 4.13. $D = 2$ durumunda N~(6, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları



Şekil 4.14. $D = 2$ durumunda N~(10, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları



Şekil 4.15. %90'ı N~(6, 2) ve %10'u N~(9, 2) (kırmızı) ve tahmin edilen %79.21'i N~(5.84, 1.95) ve %20.79'u N~(8.57, 2.4) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları



Şekil 4.16. %60'ı N~(6,2) ve %40'ı N~(10,2) (kırmızı) ve oluşturulan ampirik dağılımın (mavi) yoğunluk fonksiyonları

Çizelge 4.7. İşlem süresi $D = 2$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması

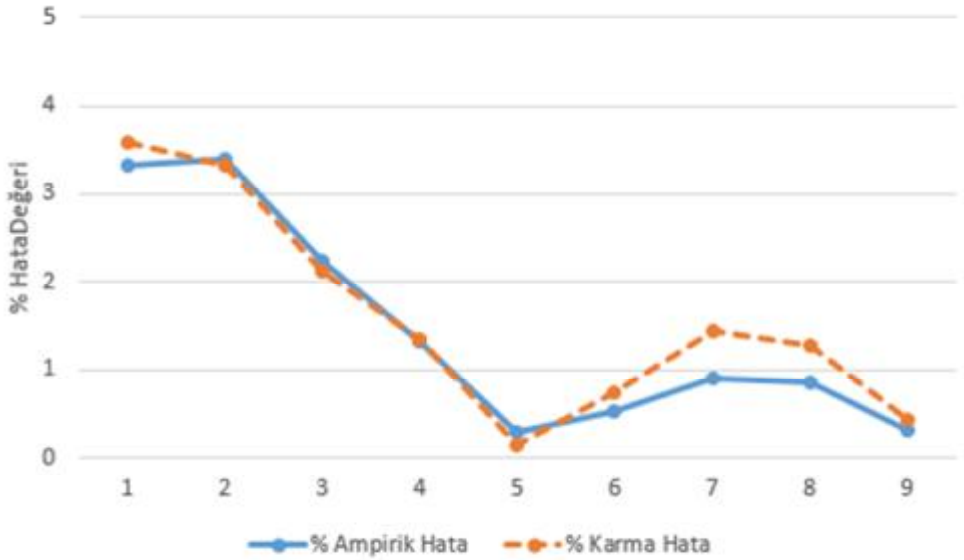
	İşlem Süresi D = 2	**Mann- Whitney U Saf**	**Mann- Whitney U Karma**
1	N~(6,2)%10 + N~(10,2) %90	0.91	0.65
2	N~(6,2)%20 + N~(10,2) %80	0.92	0.66
3	N~(6,2)%30 + N~(10,2) %70	0.93	0.71
4	N~(6,2)%40 + N~(10,2) %60	0.94	0.64
5	N~(6,2)%50 + N~(10,2) %50	0.93	0.66
6	N~(6,2)%60 + N~(10,2) %40	0.93	0.77
7	N~(6,2)%70 + N~(10,2) %30	0.94	0.72
8	N~(6,2)%80 + N~(10,2) %20	0.95	0.63
9	N~(6,2)%90 + N~(10,2) %10	0.95	0.50

Mann-Whitney U testine göre, hem 50 kategoriye bölünüp oluşturulan ampirik dağılımlar hem de tahmin edilen karma dağılımlar üretilen verileri temsil ettiği görülmüştür. D değeri 1'den uzaklaşması ve karma dağılım özellikleri artması sebebiyle tahmin edilen karma dağılım parametrelerin Mann-Whitney U değerinin, $D=1.5$ iken hesaplanan Mann-Whitney U değerlerinden daha yüksek olduğu görülmektedir.

İşlem süresi farklı oranlarda, $D=2$ olan iki normal dağılımdan oluşan bir M/G/1 kuyruk sistemi analiz edilmiştir ve hesaplanan teorik sonuçlarla oluşturulan ampirik ve normal karma dağılım yaklaşımına bağlı olarak elde edilen sonuçlar % hata cinsinden karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.8. $D = 2$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri

DURUM	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
SAF	3.34	3.39	2.24	1.32	0.28	0.53	0.89	0.86	0.3
KARMA	3.59	3.32	2.12	1.35	0.15	0.73	1.45	1.28	0.44



Şekil 4.17. $D = 2$ olduğu durumlar için % hata değerleri

Karma oranlarının birbirine yaklaşıp karma karakteri arttıkça, % bağıl hata giderek düşmüştür ve N~(6, 2) ve N~(10, 2) dağılımlarının eşit karıştığı durumda en düşük seviyeye ulaşmıştır. Bunun sebebi D'nın 1'den uzaklaşmasıyla birlikte iki normal dağılımın birbirinden ayrılarak benzer ortak değerlerinin azalması ve iki aynı dağılım şeklinde davranmaya eğilimli olmasıdır.

4.1.3. Mahalanobis Uzaklığının 2.5 Olduğu Durum

İşlem süresini oluşturan normal karma dağılımın Mahalanobis uzaklığı $D = 2.5$ olması durumunda, ampirik dağılım ve normal karma dağılıma yaklaşımlarıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik olarak hesaplanan kuyrukta bekleme sürelerine göre performansı incelenmiştir.

Çizelge 4.9. $D = 2.5$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar

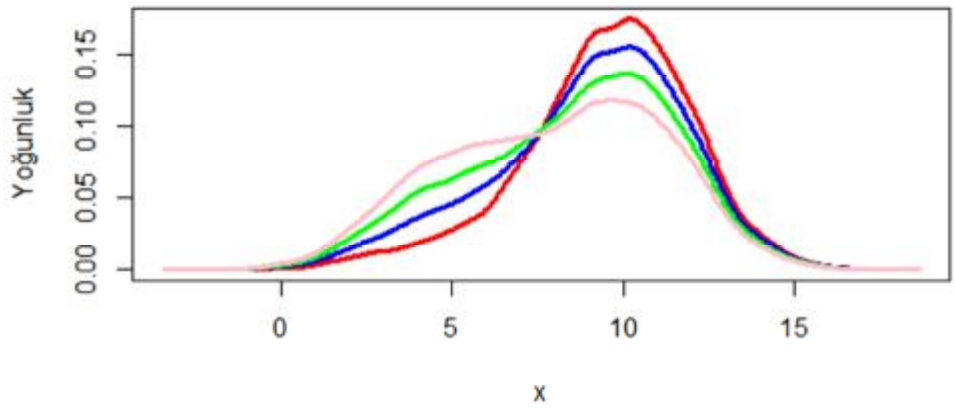
yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları

	Gelişler arası süre: EXPO(10)	**TEORİK**	c^2	**SAF**	**KARMA**
	İşlem Süresi D = 2.5	$W_q(dk)$	***p < 0.5 = Ret***	$W_q(dk)$	$W_q(dk)$
1	N~(5,2)%10 + N~(10,2) %90	95.01	Ampirik	93.55	94.52
2	N~(5,2)%20 + N~(10,2) %80	43.53	Ampirik	43.15	43.16
3	N~(5,2)%30 + N~(10,2) %70	26.76	Ampirik	26.62	26.57
4	N~(5,2)%40 + N~(10,2) %60	18.32	Ampirik	18.34	18.27
5	N~(5,2)%50 + N~(10,2) %50	13.18	Ampirik	13.2	13.1
6	N~(5,2)%60 + N~(10,2) %40	9.76	Ampirik	9.79	9.74
7	N~(5,2)%70 + N~(10,2) %30	7.29	Ampirik	7.32	7.27
8	N~(5,2)%80 + N~(10,2) %20	5.44	Ampirik	5.45	5.43
9	N~(5,2)%90 + N~(10,2) %10	4.03	Ampirik	4.05	4.03

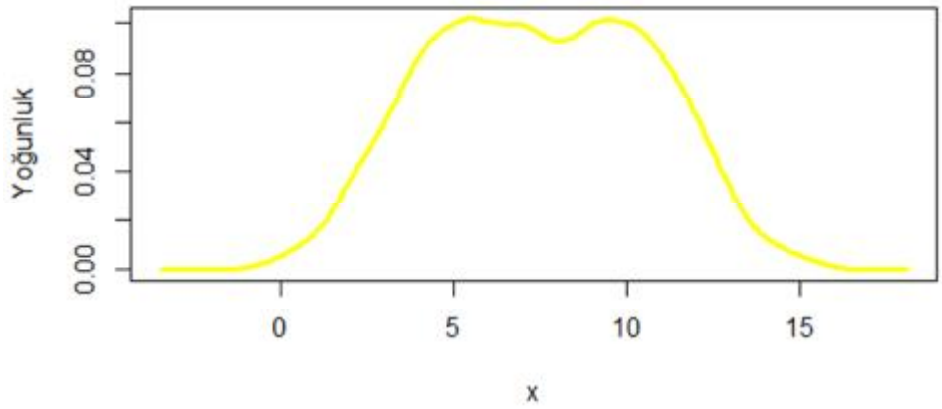
N~(5,2) + N~(10,2) veri seti için oluşturulan ampirik dağılımlar EK-3'te verilmiştir

$D=1.5$ ve 2 durumuna benzer şekilde tüm durumlarda da c^2 testi sonucunda ampirik dağılım oluşturulması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Oluşturan

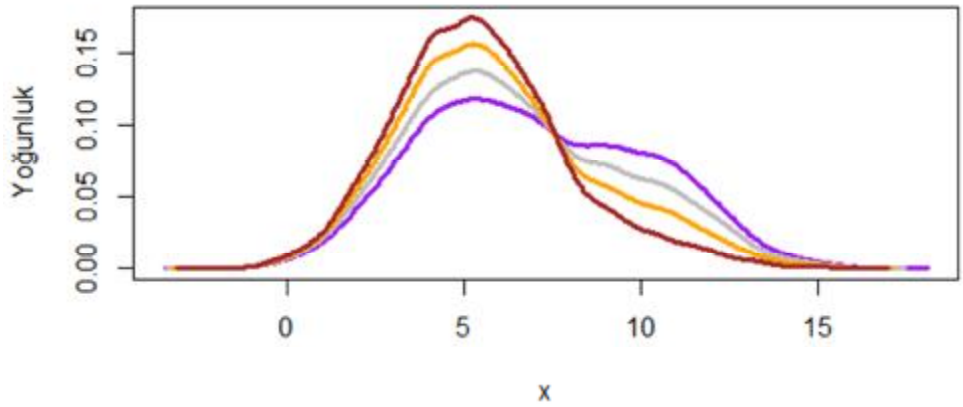
ampirik dağılım ve normal karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme süreleri Çizelge 4.9'da gösterilmiştir.



N~(5, 2) %10 + N~(10,2) %90: Kırmızı N~(5, 2) %20 + N~(10,2) %80: Mavi
N~(5, 2) %30 + N~(10,2) %70: Yeşil N~(5, 2) %40 + N~(10,2) %60: Pembe
Şekil 4.18. D = 2.5 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 1



N~(6,2) %50 + N~(10,2) %50: Sarı
Şekil 4.19. D = 2.5 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 2



N~(6,2) %60 + N~(10,2) %40: Mor N~(6,2) %70 + N~(10,2) %30: Gri
N~(6,2) %80 + N~(10,2) %20: Turuncu N~(6,2) %90 + N~(10,2) %10: Kahverengi
Şekil 4.20. D = 2.5 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 3

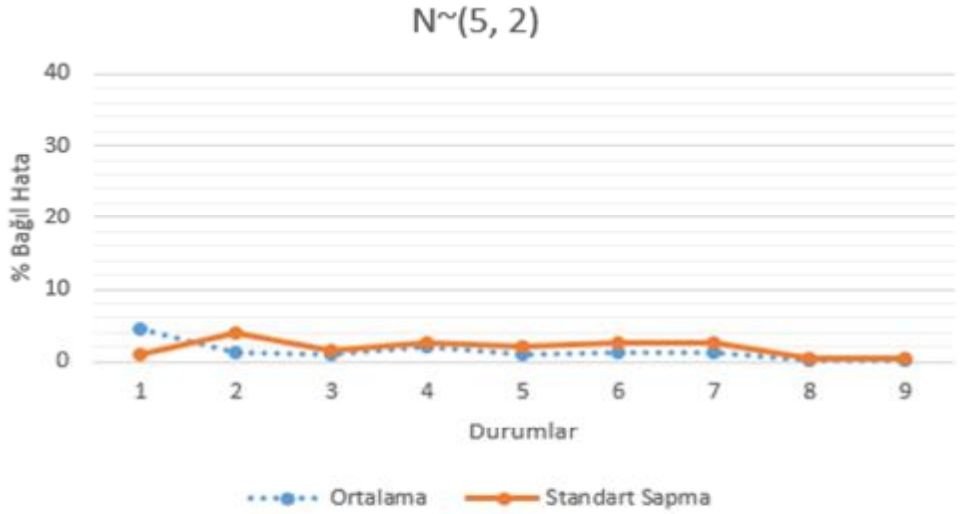
Şekil 4.19.'da görüldüğü üzere, D arttıkça, karma dağılımın yoğunluk fonksiyonunda normal dağılımlar ayrılmaya başlamış ve görünürlüğü artmıştır.

Çizelge 4.10. $D = 2.5$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler

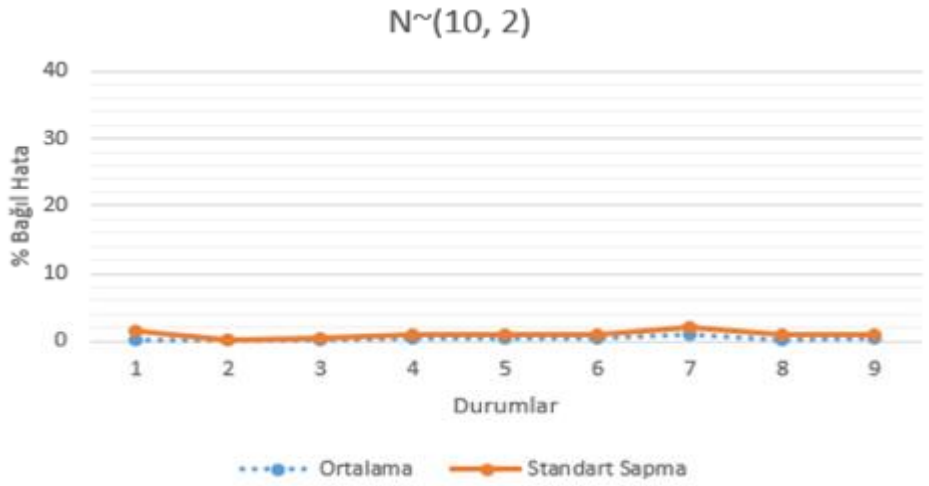
	İşlem Süresi D = 2.5	k	TAHMİN EDİLEN PARAMETRELER	TOPLAM PARAMETRELER
1	N~(5,2)%10 + N~(10,2) %90	2	N~(4.78, 2.02) %9.43 + N~(9.98, 2.03) %90.57	N~(9.48, 2.53)
2	N~(5,2)%20 + N~(10,2) %80	2	N~(5.07, 2.08) %20.99 + N~(10.01, 2.006) %79.01	N~(8.97, 2.85)
3	N~(5,2)%30 + N~(10,2) %70	2	N~(5.05, 2.03) %30.96 + N~(10.01, 1.99) %69.04	N~(8.47, 3.04)
4	N~(5,2)%40 + N~(10,2) %60	2	N~(5.1, 2.05) %41.9 + N~(10.06, 1.98) %58.1	N~(7.98, 3.16)
5	N~(5,2)%50 + N~(10,2) %50	2	N~(5.05, 2.04) %51.4 + N~(10.04, 1.98) %48.6	N~(7.47, 3.2)
6	N~(5,2)%60 + N~(10,2) %40	2	N~(5.06, 2.05) %61.53 + N~(10.06, 1.98) %38.47	N~(6.98, 3.16)
7	N~(5,2)%70 + N~(10,2) %30	2	N~(5.06, 2.05) %71.91 + N~(10.11, 1.96) %28.09	N~(6.47, 3.04)
8	N~(5,2)%80 + N~(10,2) %20	2	N~(5.008, 2.01) %80.58 + N~(10.01, 1.98) %19.42	N~(5.97, 2.81)
9	N~(5,2)%90 + N~(10,2) %10	2	N~(5.009, 2.01) %90.21 + N~(9.94, 2.02) %9.79	N~(5.49, 2.48)

Şekil 4.21. ve Şekil 4.22.'de görüldüğü üzere, D uzaklığı arttıkça, tahmin edilen karma dağılım parametre bağıl hataları düşmüş ve test verilerine yaklaşmıştır.

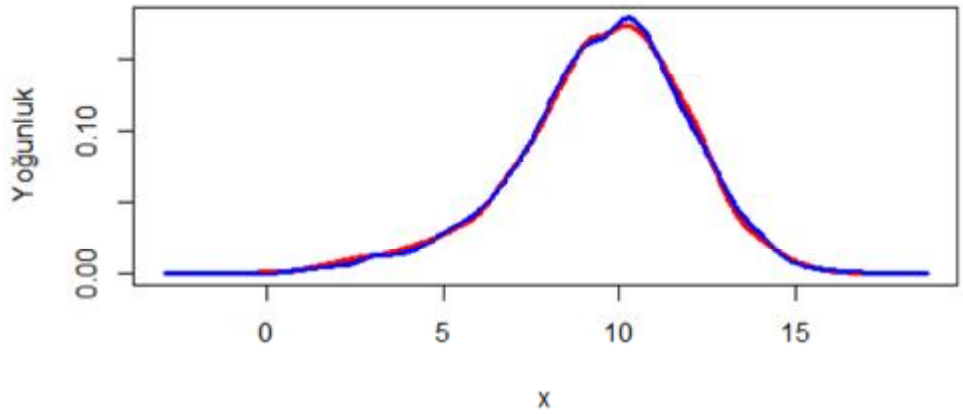
Mann-Whitney U testine göre, hem ampirik dağılım fonksiyonlarının hem de tahmin edilen normal karma dağılımların test verilerini temsil ettiği gözlemlenmiştir.



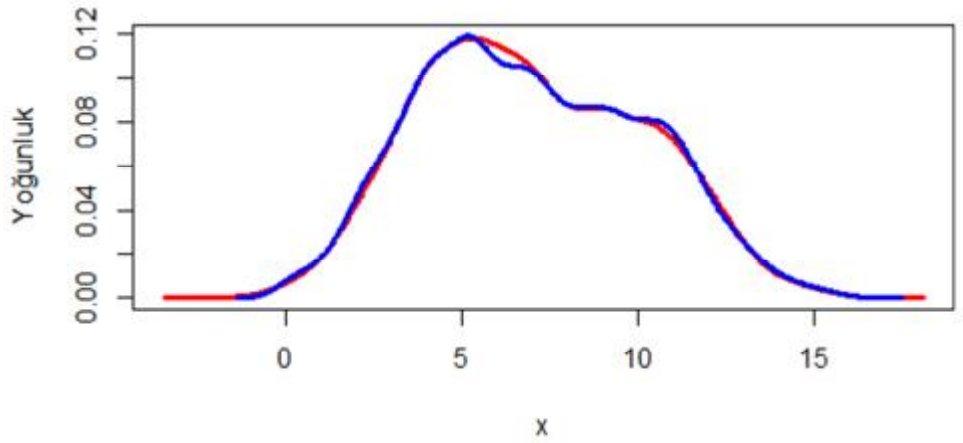
Şekil 4.21. $D = 2.5$ durumunda N~(5, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları



Şekil 4.22. $D = 2.5$ durumunda N~(10, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları



Şekil 4.23. %10'u N~(5,2) ve %90'ı N~(10,2) (kırmızı) ve tahmin edilen %9.43'u N~(4.78, 2.02) ve %90.57'si N~(9.98, 2.03) (mavi) karma dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları



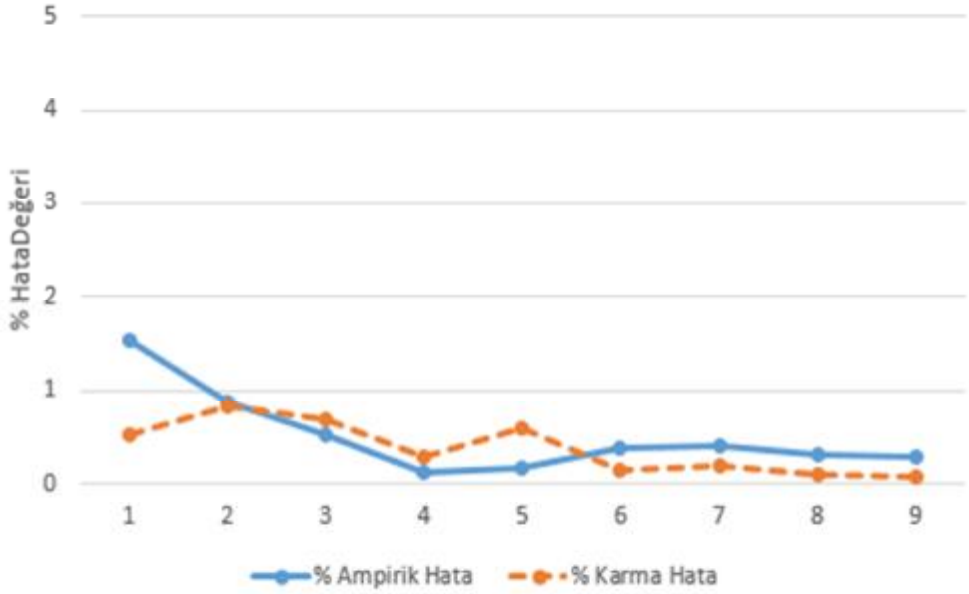
Şekil 4.24. %60'ı N~(5,2) ve %40'ı N~(10,2) (kırmızı) ve ampirik dağılımlarının (mavi) yoğunluk fonksiyonları

Çizelge 4.11. İşlem süresi $D = 2.5$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması

	İşlem Süresi D = 2.5	**Mann- Whitney U Saf**	**Mann- Whitney U Karma**
1	N~(5,2)%10 + N~(10,2) %90	0.86	0.43
2	N~(5,2)%20 + N~(10,2) %80	0.93	0.59
3	N~(5,2)%30 + N~(10,2) %70	0.93	0.69
4	N~(5,2)%40 + N~(10,2) %60	0.94	0.59
5	N~(5,2)%50 + N~(10,2) %50	0.95	0.63
6	N~(5,2)%60 + N~(10,2) %40	0.95	0.57
7	N~(5,2)%70 + N~(10,2) %30	0.89	0.52
8	N~(5,2)%80 + N~(10,2) %20	0.90	0.51
9	N~(5,2)%90 + N~(10,2) %10	0.92	0.63

Çizelge 4.12. $D = 2.5$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri

DURUM	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
SAF	1.53	0.88	0.51	0.12	0.17	0.37	0.39	0.3	0.29
KARMA	0.51	0.84	0.68	0.29	0.59	0.15	0.19	0.1	0.07



Şekil 4.25. $D = 2.5$ olduğu durumlar için % hata değerleri

İşlem süresi farklı oranlarda $D = 2.5$ olacak şekilde normal karma dağılımların oluşturduğu bir M/G/1 kuyruk sisteminde, 3-4 ve 5. durumlar dışındaki tüm durumlarda karma dağılım kullanılmasının daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

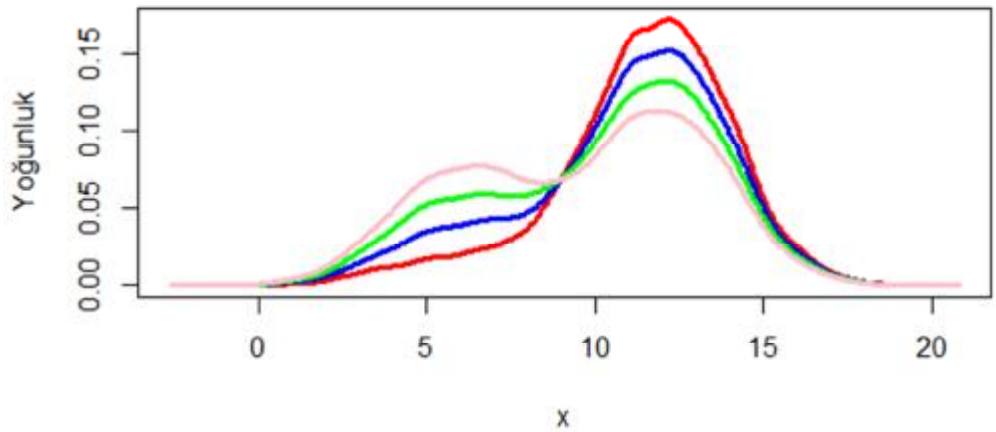
4.1.4. Mahalanobis Uzaklığının 3 Olduğu Durum

D = 1.5, 2 ve 2.5 durumlarına benzer şekilde $D = 3$ olan tüm durumlarda da c^2 testi sonucunda ampirik dağılım oluşturulması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Oluşturan ampirik dağılım ve normal karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme süreleri Çizelge 4.13.'te gösterilmiştir.

Çizelge 4.13. D = 3 olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları

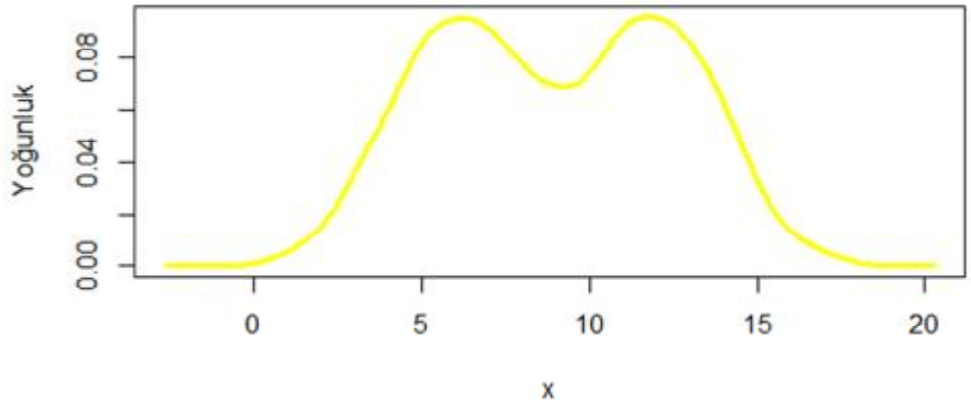
	Gelişler arası süre: EXPO(15)	TEORİK	c^2	SAF	KARMA
	İşlem Süresi D = 3	$W_q(dk)$	$p < 0.5$ = *Ret*	$W_q(dk)$	$W_q(dk)$
1	N~(6,2)%10 + N~(12,2) %90	19.06	Ampirik	18.93	18.95
2	N~(6,2)%20 + N~(12,2) %80	15.05	Ampirik	14.88	14.9
3	N~(6,2)%30 + N~(12,2) %70	12.04	Ampirik	11.92	12.1
4	N~(6,2)%40 + N~(12,2) %60	9.70	Ampirik	9.63	9.63
5	N~(6,2)%50 + N~(12,2) %50	7.83	Ampirik	7.8	7.8
6	N~(6,2)%60 + N~(12,2) %40	6.3	Ampirik	6.29	6.27
7	N~(6,2)%70 + N~(12,2) %30	5.03	Ampirik	5.01	4.98
8	N~(6,2)%80 + N~(12,2) %20	3.95	Ampirik	3.93	3.91
9	N~(6,2)%90 + N~(12,2) %10	3.02	Ampirik	3.06	3.01

N~(6,2) %10 + N~(12,2) veri seti için oluşturulan ampirik dağılımlar EK-4'te verilmiştir.

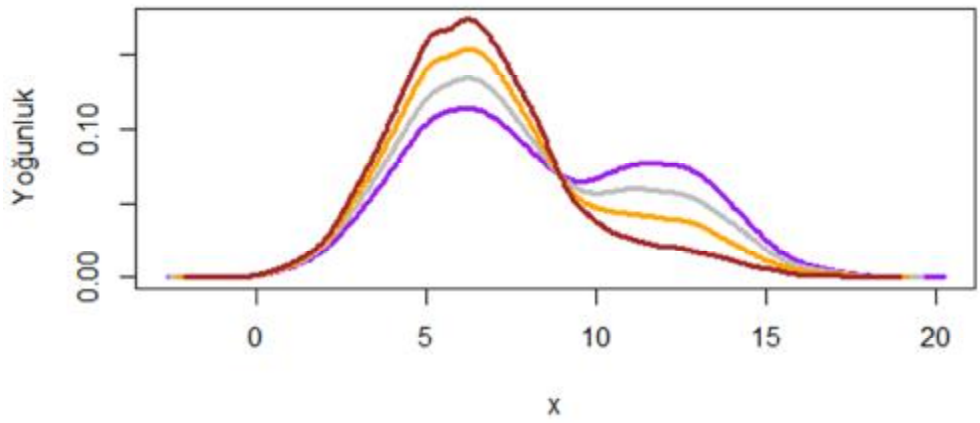


N~(6,2) %10 + N~(12,2) %90: Kırmızı N~(6,2) %20 + N~(12,2) %80: Mavi
N~(6,2) %30 + N~(12,2) %70: Yeşil N~(6,2) %40 + N~(12,2) %60: Pembe

Şekil 4.26. D = 3 olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları - 1



N~(6,2) %50 + N~(12,2) %50: Sarı
Şekil 4.27. $D=3$ olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları – 2

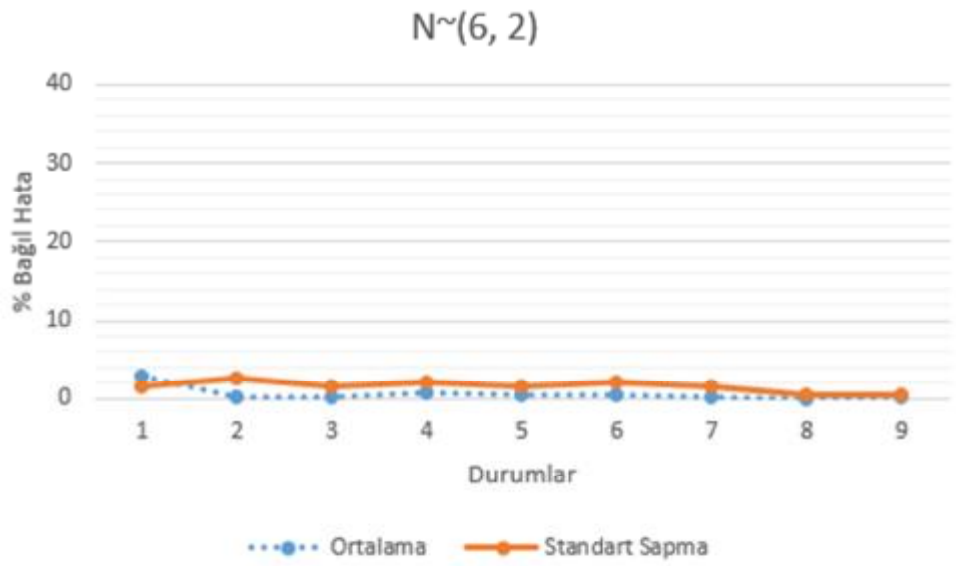


N~(6,2) %60 + N~(12,2) %40: Mor N~(6,2) %70 + N~(12,2) %30: Gri
N~(6,2) %80 + N~(12,2) %20: Turuncu N~(6,2) %90 + N~(12,2) %10: Kahverengi
Şekil 4.28. $D=3$ olduğu durumlar için yoğunluk fonksiyonları – 3

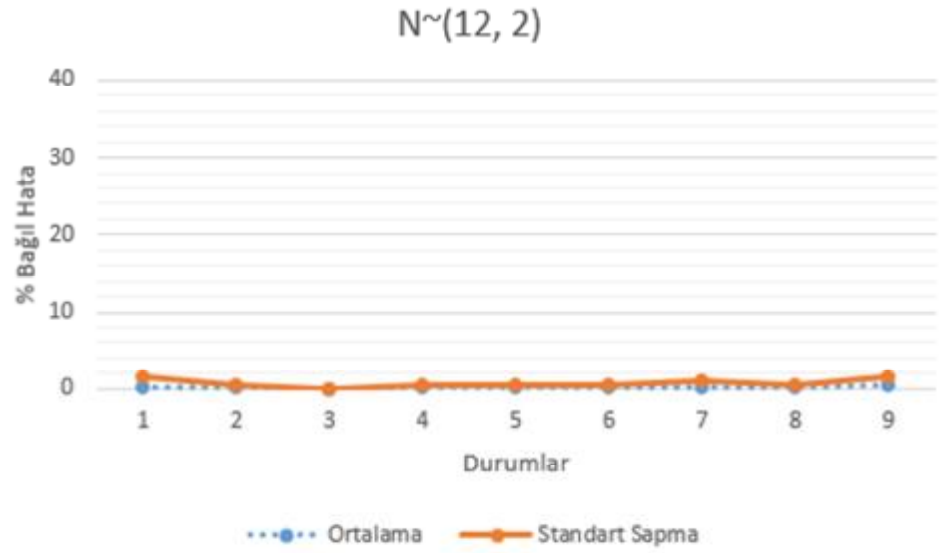
Şekil 4.27.'de görüldüğü üzere $D=3$ olması nedeniyle normal dağılımlar birbirinden ayrılmış ve de çift tepeli bir normal karma dağılımı yoğunluk fonksiyonu oluşturmuşlardır.

Çizelge 4.14. $D=3$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler

	İşlem Süresi D **= 3**	***k***	**TAHMİN EDİLEN PARAMETRELER**	**TOPLAM PARAMETRELER**
1	N~(6,2)%10 + N~(12,2) %90	2	N~(5.82, 2.03) %9.67 + N~(11.98, 2.03) %90.33	N~(11.38, 2.72)
2	N~(6,2)%20 + N~(12,2) %80	2	N~(5.99, 2.05) %20.28 + N~(11.99, 2.01) %79.72	N~(10.77, 3.14)
3	N~(6,2)%30 + N~(12,2) %70	2	N~(6.02, 2.03) %30.47 + N~(12, 2) %68.05	N~(10, 3.39)
4	N~(6,2)%40 + N~(12,2) %60	2	N~(6.05, 2.04) %40.88 + N~(12.02, 1.99) %59.12	N~(9.57, 3.55)
5	N~(6,2)%50 + N~(12,2) %50	2	N~(6.03, 2.03) %50.72 + N~(12.02, 1.99) %49.28	N~(8.98, 3.61)
6	N~(6,2)%60 + N~(12,2) %40	2	N~(6.03, 2.04) %60.79 + N~(12.03, 1.99) %39.21	N~(8.38, 3.55)
7	N~(6,2)%70 + N~(12,2) %30	2	N~(6.02, 2.03) %70.80 + N~(12.03, 1.98) %29.2	N~(7.77, 3.39)
8	N~(6,2)%80 + N~(12,2) %20	2	N~(6, 2.01) %80.35 + N~(11.98, 1.99) %19.65	N~(7.17, 3.1)
9	N~(6,2)%90 + N~(12,2) %10	2	N~(6.01, 2.01) %90.18 + N~(11.93, 2.03) %9.82	N~(6.59, 2.67)

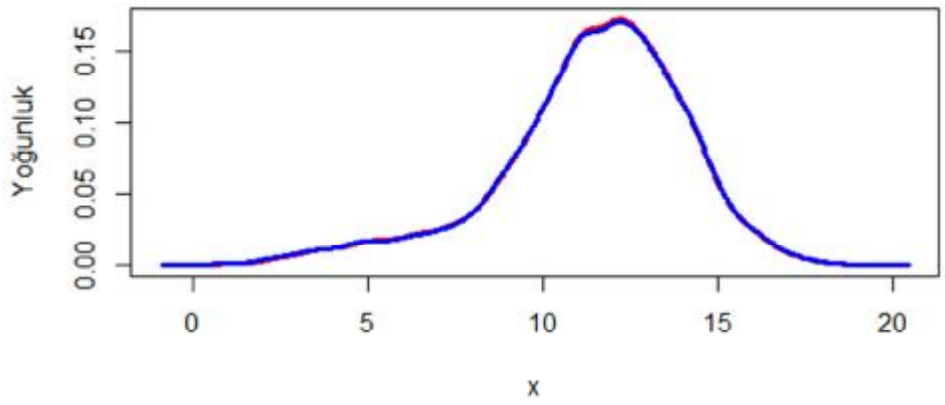


Şekil 4.29. $D=3$ durumunda N~(6, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları

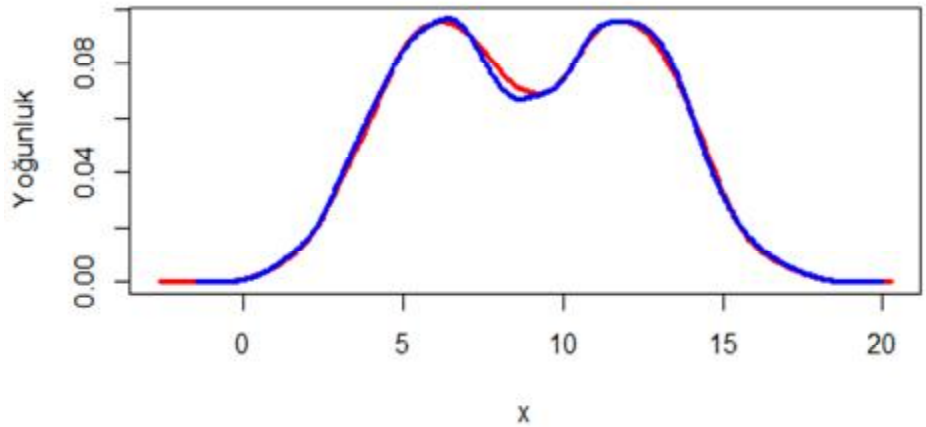


Şekil 4.30. $D=3$ durumunda N~(12, 2) dağılım için tahmin edilen parametre sapmaları

$D = 3$ olması sebebiyle iki normal dağılımın ortak değerleri azalmış ve yoğunluk fonksiyonunda karma oranlarının birbirine yakın olduğu durumlarda çift tepe görünümü ortaya çıkmıştır. BIC testi sonucunda tüm durumlar için $k = 2$ bulunmuş ve tahmin edilen parametreler test verileriyle karşılaştırıldığında %1'in altında bağıl hata değeri olduğu hesaplanmıştır.



Şekil 4.31. %10'u N~(6,2) ve %90'ı N~(12,2) (kırmızı) ile tahmin edilen %9.67'si N~(5.82, 2.03) ve %90.33'ü N~(11.98, 2.03) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları



Şekil 4.32. %50'si N~(6,2) ve %50'si N~(12,2) (kırmızı) ile oluşturulan ampirik dağılımın (mavi) yoğunluk fonksiyonları

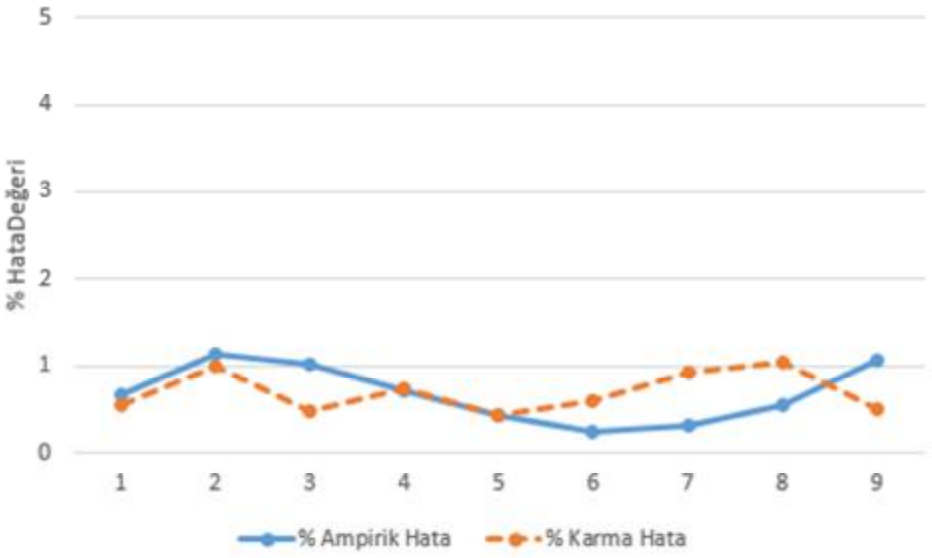
Çizelge 4.15. İşlem süresi $D=3$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması

	İşlem Süresi D = 3	**Mann- Whitney U Saf**	**Mann- Whitney U Karma**
1	N~(6,2)%10 + N~(12,2) %90	0.57	0.99
2	N~(6,2)%20 + N~(12,2) %80	0.52	0.99
3	N~(6,2)%30 + N~(12,2) %70	0.63	0.98
4	N~(6,2)%40 + N~(12,2) %60	0.54	0.99
5	N~(6,2)%50 + N~(12,2) %50	0.52	0.98
6	N~(6,2)%60 + N~(12,2) %40	0.52	0.99
7	N~(6,2)%70 + N~(12,2) %30	0.64	0.98
8	N~(6,2)%80 + N~(12,2) %20	0.53	0.99
9	N~(6,2)%90 + N~(12,2) %10	0.54	0.98

Mann-Whitney U değerleri incelenecek olursa, tüm durumlarda 50 kategoriye bölünmüş olmasına rağmen, ampirik dağılım için hesaplanan değerler, D = 1.5 ve 2 olduğu durumlardan ani inişler ile ampirik dağılımın veri kaybı oluşturması sebebiyle daha düşük çıkmıştır. $D=3$ olan bu durumda, karma dağılım karakteri tam anlamıyla ortaya çıktığı için, tahmin edilen parametrelerin bağıl hatası çok düşük, buna bağlı olarak bu tahmin edilen verilerin test verilerini temsil etmesi Mann-Whitney U testi ile kontrol edildiğinde $p=1$'e oldukça yaklaştığı görülmüştür. Bunun sebebi, veri setinin karma dağılım karakteri yükseldikçe düzgün dağılım şeklinde davranmaması ve ampirik dağılımın belirli aralıklardaki değerleri temsil edememesidir.

Çizelge 4.16. $D=3$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri

DURUM	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
SAF	0.66	1.13	1.02	0.72	0.44	0.23	0.32	0.55	1.05
KARMA	0.55	0.98	0.48	0.74	0.43	0.58	0.93	1.04	0.5



Şekil 4.33. $D=3$ olduğu durumlar için % hata değerleri

$D=3$ olan durumlar için 4,6,7 ve 8 numaraları durumlarda ampirik dağılım yaklaşımı teorik sonuca daha yakın değerleri hesaplayabilmiştir. Karma dağılım için hesaplanan % bağıl hatalar ile, ampirik dağılım için hesaplananlar

birbirine çok yakın değerdedir. Bu sebeple ampirik dağılım ve normal karma dağılım arasında seçim yapmak zordur.

4.2. İşlem Süresinin Üstel Karma Dağılım Olduğu Durumlar

İşlem süresinin normal karma dağılımlardan oluştuğu farklı D değerlerinde durumlar incelendikten sonra, bu bölümde kesin çözümü olan ve veri belirli aralığa yığılması sebebiyle ampirik dağılım oluşturulması problemi yaşanan işlem süresi üstel karma dağılım olan kuyruk modelinin performansı analiz edilecektir. Sistemin kullanım oranı $r = \frac{l}{m}$ olmak üzere, M/M/1 sisteminin formülleri şu şekildedir (Panico, 1969).

Sistemdeki ortalama müşteri sayısının beklenen değeri

$$L = \frac{r}{1 - r} = \frac{l}{m - l}$$

Kuyrukta bekleyen müşteri sayısının beklenen değeri

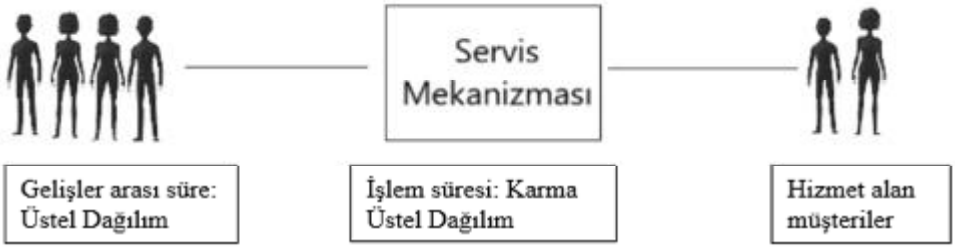
$$L_q = \frac{l}{m(m - l)}$$

Müşterinin sistemde bulunduğu zamanın beklenen değeri

$$W = \frac{1}{m - l}$$

Müşterinin kuyrukta bulunduğu zamanın beklenen değeri

$$W_q = \frac{l}{m(m-l)}$$



Şekil 4.34. İşlem süresinin karma üstel dağılım olduğu bir kuyruk sistemi

Üstel dağılımlar karmasının yoğunluk fonksiyonları klasik karma dağılımlar şeklinde görülmediği için tespit edilmesi çok zordur. Bu sebeple üretilen üstel karma dağılımları analiz ederken normal karma dağılımlardan oluştuğu varsayımı yapılmıştır.

Özellikle ampirik dağılımlar için Mann-Whitney U p değerinin 0.9'dan yüksek olmasına özen gösterilmiştir. Çünkü veriler yeteri kadar ayrılmadığı zaman oluşturacak olan ampirik dağılım, verileri temsil edemeyebilir ve sonuçları etkileyebilir.

Çizelgede "Teorik" sütunu M/M/1 ya da M/G/1 kuyruk sistemine göre çözülmüş ortalama kuyrukta bekleme süresini göstermektedir. Eğer c^2 testi sonucunda veriler üstel dağılıma uyuyorsa, kuyruk sistemi M/M/1 kuyruk sistemi olarak davranacağı için *"Little's Formula"*, eğer bilinen herhangi bir dağılıma uymuyorsa M/G/1 sistemine dönüşeceğinden Pollaczek-Khintchine formüllerinden yararlanılmıştır. "c^2" sütunu, c^2 testine göre veri setinin bilinen bir dağılıma uyup uymadığı bilgisi, "Saf" sütunu, c^2 testi sonucunda seçilen dağılım ya da ampirik fonksiyona bağlı olarak elde edilen ortalama kuyrukta bekleme süresini, "Karma" sütunu ise, veri setine normal karma dağılımlar yaklaşımı ile bileşen

sayısı ve parametre tahmini yapıldıktan sonra elde edilen ortalama kuyrukta bekleme süresini göstermektedir.

4.2.1. $m_1/m_2 = 1.5$ Olduğu Durum

Çizelge 4.17. $m_1/m_2 = 1.5$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları

	Gelişler arası süre EXPO(7.5)	**TEORİK**	c^2	**SAF**	**KARMA**
	İşlem Süresi $m_1/m_2=1.5$	$W_q(dk)$	***p < 0.1 = Ret***	$W_q(dk)$	$W_q(dk)$
1	EXPO(4)%10 + EXPO(6)%90	20.16	EXPO(5.82) p = 0.24	20.62	20.55
2	EXPO(4)%20 + EXPO(6)%80	16.22	EXPO(5.58) p = 0.31	16.51	16.66
3	EXPO(4)%30 + EXPO(6)%70	13.54	EXPO(5.37) p = 0.39	13.79	13.92
4	EXPO(4)%40 + EXPO(6)%60	11.57	EXPO(5.18) p = 0.13	11.8	11.97
5	EXPO(4)%50 + EXPO(6)%50	10.23	Ampirik	10.4	10.22
6	EXPO(4)%60 + EXPO(6)%40	8.8	Ampirik	8.5	8.76
7	EXPO(4)%70 + EXPO(6)%30	7.42	Ampirik	7.53	7.40
8	EXPO(4)%80 + EXPO(6)%20	6.34	Ampirik	6.26	6.33
9	EXPO(4)%90 + EXPO(6)%10	5.52	Ampirik	5.48	5.51

EXPO(4) + EXPO(6) veri seti için oluşturulan ampirik dağılımlar EK-5'te verilmiştir.

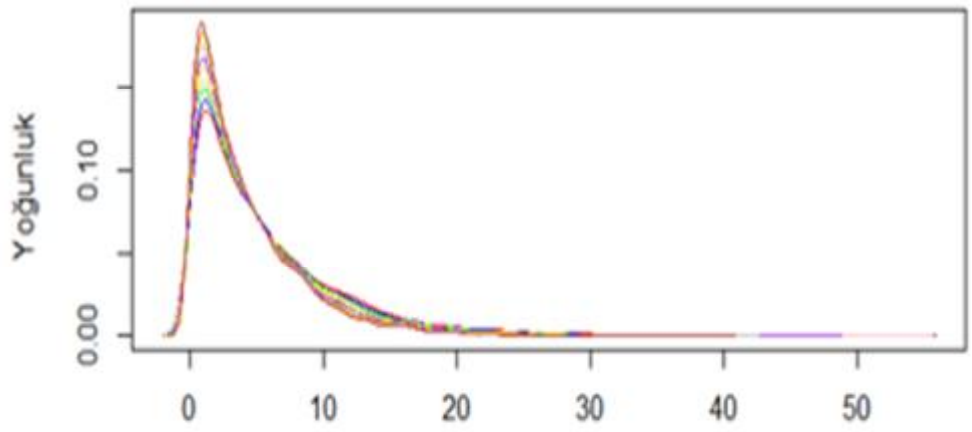
Çizelge 4.17'de görüldüğü gibi; c^2 testi sonucunda ilk 4 durumun Üstel dağılıma uyduğu, geri kalan durumların ise bilinen hiç bir dağılıma uymadığı tespit edilmiştir.

Bir dağılımın, parametreleri bilinen k tane normal dağılımlar karmasından oluştuğu biliniyorsa, ortalama değeri ve varyansı en çok olabilirlik yöntemi ile hesaplanabilir.

$$m=\sum_{i=1}^{k} p_i m_i \qquad s^2=\sum_{i=1}^{k} p_i((m_i-m)^2+s_i^2)$$

Parametre tahmini yapıldıktan sonra, karma dağılımlar için teorik sonuçlar en çok olabilirlik yöntemi ile hesaplanan parametre değerlerine sahip normal dağılım işlem süresine sahip olan M/G/1 sistemi olarak çözülmüştür.

m_1 / m_2 değeri 1'e yakın olduğu için, iki dağılım birbirine benzer değerlere sahiptir Bu sebeple c^2 testi ilk 4 durumda anlamlı ve üstel dağılım ailesi olarak bulunmuştur.



EXPO(4) %10 + EXPO(6)%90: Kırmızı - EXPO(4)%20 + EXPO(6)%80: Mavi - EXPO(4)%30 + EXPO(6)%70: Yeşil - EXPO(4)%40 + EXPO(6)%60: Pembe EXPO(4)%50 + EXPO(6)%50: Sarı - EXPO(4)%60 + EXPO(6)%40: Mor - EXPO(4)%70 + EXPO(6)%30: Gri - EXPO(4)%80 + EXPO(6)%20: Turuncu - EXPO(4)%90 + EXPO(6)%10: Kahverengi

Şekil 4. 35. $m_1 / m_2 = 1.5$ olduğu her bir durum için yoğunluk fonksiyonları

Şekil 4.35.'te $\mu_1/\mu_2=1.5$ durumunda tüm karma oranları için yoğunluk fonksiyonları çizilmiştir. EXPO(4) ve EXPO(6) dağılımlarının bileşiminden oluşan bu durum için EXPO(6) dağılımının karma oranı düştükçe dağılım sivrilmeye başlamıştır.

$\mu_1/\mu_2=1.5$ durumu için üretilen tüm karma oranlarındaki veriler için bilinen herhangi bir dağılıma uysa bile normal karma dağılımlar yaklaşımıyla da analiz edilmiştir. İlk olarak veriler için BIC analizi yapılarak bileşen sayısı tahmin edilmeye çalışılmıştır. Normal karma dağılımlar yaklaşımıyla tahmin edilen k bileşen sayıları ve EM algoritması ile her bir bileşen için parametreler tahmin edilmiştir ve Çizelge 4.20'de gösterilmiştir.

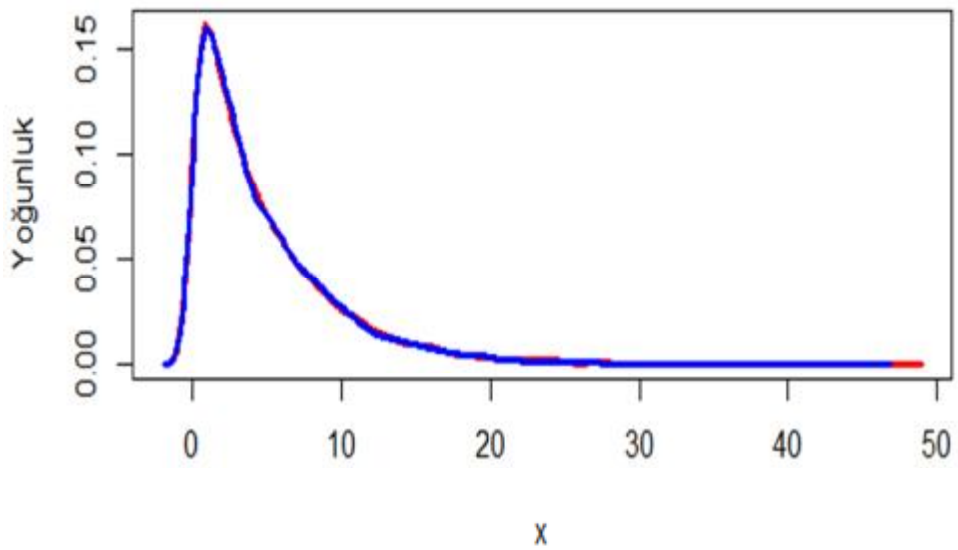
Çizelge 4.18. $\mu_1/\mu_2=1.5$ durumu için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler

	İşlem Süresi $\mu_1/\mu_2=1.5$	k	TAHMİN EDİLEN PARAMETRELER	TOPLAM PARAMETRELER
1	EXPO(4)%10 + EXPO(6)%90	7	N~(0.21, 0.13) %5.8 + N~(0.72, 0.31) %10.69 + N~(1.79, 0.65) % 18.17 + N~(3.57, 1.15) %19.17 + N~(6.26, 1.91) %20 + N~(19.92, 7.96) %6.99 + N~(10.86, 3.51) %19.18	N~(5.82, 5.93)
2	EXPO(4)%20 + EXPO(6)%80	7	N~(0.77, 0.33) %11.7 + N~(0.22,0.13) %6.58 + N~(1.88, 0.67) %19.36 + N~(3.83, 1.22) %20.69 + N~(6.69, 2.05) %19.6 + N~(11.28,3.65) %16.15 + N~(20.09, 7.96) %5.92	N~(5.58, 5.73)
3	EXPO(4)%30 + EXPO(6)%70	7	N~(0.67, 0.28) %10.75 + N~(0.19, 0.12) %5.84 + N~(1.64, 0.61) %18.21 + N~(3.43, 1.16) %21.6 + N(6.31, 2.01) %21.68 + N~(10.93, 3.59) %16.3 + N~(19.61, 7.74) %5.62	N~(5.37, 5.52)

Çizelge 4.18. Devamı

4	EXPO(4)%40 + EXPO(6)%60	7	N~(0.19, 0.11) % 5.98 + N~(6.06, 1.94) %21.62 + N~(0.65, 0.28) %10.76 + N~(1.59, 0.59) %18.07 + N~(3.29, 1.11) %21.61 + N~(10.55, 3.48) %16.34 + N~(19.07, 7.48) %5.62	N~(5.18, 5.36)
5	EXPO(4)%50 + EXPO(6)%50	9	N~(0.26, 0.11) %5.65 + N~(0.061, 0.03) %1.99 + N~(0.61, 0.22) %8.18 + N~(1.3, 0.43) %13.58 + N~(2.45, 0.76) %17.82 + N~(4.4, 1.34) %20.48 + N~(21.02, 7.3) %3.45 + N~(7.54, 2.24) %18.58 + N~(12.4, 3.71) %10.27	N~(4.98, 5.17)
6	EXPO(4)%60 + EXPO(6)%40	8	N~(0.058, 0.034) %1.9 + N~(0.306, 0.14) %7.59 + N~(0.88, 0.35) %13.34 + N~(1.93, 0.68) %19.77 + N~(11.59, 3.64) %11.91 + N~(3.77, 1.2) % 21.22 + N~(6.72, 2.04) %20.98 + N~(20.48, 7.41) %3.29	N~(4.78, 4.98)
7	EXPO(4)%70 + EXPO(6)%30	8	N~(0.12, 0.07) %4.32 + N~(0.46, 0.2) %9.8 + N~(2.29, 0.73) %18.18 + N~(1.15, 0.42) % 15.45 + N~(4.05, 1.2) %19.27 + N~(20.23, 7.11) %2.81 + N ~(6.81, 2) %18.99 + N~(11.49, 3.55) %11.18	N~(4.57, 4.74)
8	EXPO(4)%80 + EXPO(6)%20	8	N~(0.046, 0.025) %1.63 + N~(0.57, 0.22) %10.24 + N~(0.20, 0.09) %5.04 + N~(1.38, 0.49) %18.28 + N~(2.98, 1.03) % 24.73 + N~(5.88, 1.99) %25.27 + N~(10.73, 3.61) %12.06 + N~(19.35, 6.94) %2.75	N~(4.37, 4.53)
9	EXPO(4)%90 + EXPO(6)%10	7	N~(0.15, 0.09) %5.95 + N~(0.55, 0.23) %11.29 + N~(20.13, 7.19) %1.63 + N~(3.06, 1.09) %26.33 + N~(1.39, 0.51) %19.18 + N~(6.15, 2.12) %25.42 + N~(11.41, 3.89) %10.2	N~(4.2, 4.31)

Seçilen iki durum için ampirik ve normal karma dağılım yaklaşımı verilerinin test verisi ile çakıştırılması durumunda oluşan yoğunluk fonksiyonları Şekil 4.36'da gösterilmiştir.



Şekil 4.36. %50'si EXPO(4) ve %50'si EXPO(6) (kırmızı) ile tahmin edilen ampirik (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları

Tüm karma oranları için tahmin edilen parametre değerleri, c^2 testi sonucunda tespit edilen dağılımlar ya da bilinen hiçbir dağılıma uymuyorsa kurulan ampirik dağılımlar için Mann-Whitney U testi sonuçları Çizelge 4.19'da gösterildiği gibidir.

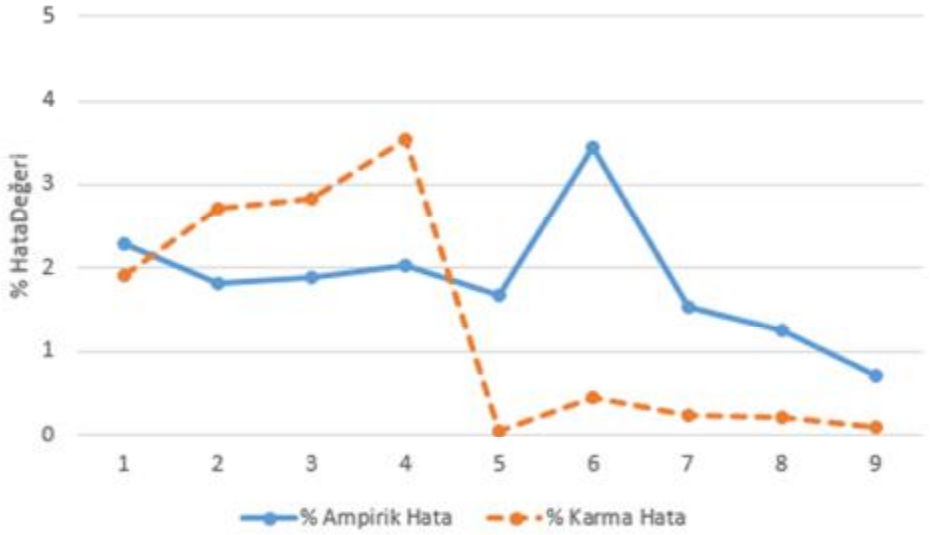
Çizelge 4.19. İşlem Süresi $m_1/m_2=1.5$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması

	İşlem Süresi $m_1/m_2=1.5$	**Mann- Whitney U Saf**	**Mann- Whitney U Karma**
1	EXPO(4)%10 + EXPO(6)%90	0.46	0.79
2	EXPO(4)%20 + EXPO(6)%80	0.31	0.93
3	EXPO(4)%30 + EXPO(6)%70	0.27	0.97
4	EXPO(4)%40 + EXPO(6)%60	0.19	0.89
5	EXPO(4)%50 + EXPO(6)%50	0.94	0.68
6	EXPO(4)%60 + EXPO(6)%40	0.95	0.59
7	EXPO(4)%70 + EXPO(6)%30	0.97	0.67
8	EXPO(4)%80 + EXPO(6)%20	0.94	0.89
9	EXPO(4)%90 + EXPO(6)%10	0.92	0.84

c^2 testinde p değeri düştükçe Mann-Whitney U değerinin de düştüğü 4. durumda rahatlıkla görülebilmektedir. Mann-Whitney U değerinin yüksek olabilmesi için ampirik dağılım oluşturulurken veriler 300 kategoriye bölünmüştür. Tahmin edilen karma dağılımlar için tüm durumlarda Mann-Whitney U testi $p>0.5$ seviyesini sağlayabilmiştir.

Çizelge 4.20. $m_1/m_2=1.5$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri

DURUM	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
SAF	2.29	1.82	1.89	2.04	1.68	3.45	1.55	1.25	0.7
KARMA	2.11	2.72	2.83	3.54	0.04	0.45	0.24	0.22	0.1



Şekil 4.37. $\mu_1 / \mu_2 = 1.5$ olduğu durumlar için % hata değerleri

% bağıl hatalar incelenecek olursa, ilk durumda % bağıl hatanın küçük bir farkla saf dağılım durumunda ufak bir farkla daha yüksek çıkmasına ihmal edilirse, χ^2 testine göre anlamı çıkan ilk dört durumda, saf dağılım durumlarında daha düşük çıkmıştır. Fakat χ^2 testine göre ampirik dağılım oluşturulan tüm durumlarda karma normal dağılım yaklaşımının % bağıl hata değerleri ampirik dağılım yaklaşımına göre daha düşük hesaplanmıştır.

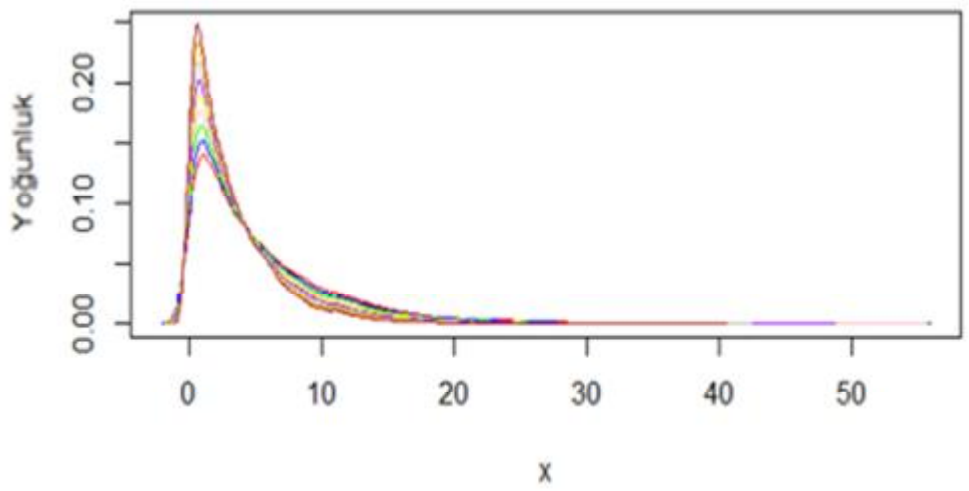
4.2.2. m_1/m_2 Olduğu Durum

Çizelge 4.21. $m_1/m_2 = 2$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları

	Gelişler arası süre: EXPO(7.5)	**TEORİK**	c^2	**SAF**	**KARMA**
	İşlem Süresi $m_1/m_2 = 2$	$W_q(dk)$	*p < 0.1 = Ret*	$W_q(dk)$	$W_q(dk)$
1	EXPO(3)%10 + EXPO(6)%90	19.14	GAMMA(6.005,0.95) p = 0.57	18.78	19.07
2	EXPO(3)%20 + EXPO(6)%80	14.53	GAMMA(5.76,0.93) p = 0.32	13.98	14.51
3	EXPO(3)%30 + EXPO(6)%70	11.41	GAMMA(5.49,0.92) p = 0.12	10.91	11.43
4	EXPO(3)%40 + EXPO(6)%60	9.24	Ampirik	8.99	9.26
5	EXPO(3)%50 + EXPO(6)%50	7.4	Ampirik	7.22	7.42
6	EXPO(3)%60 + EXPO(6)%40	5.95	Ampirik	5.82	5.97
7	EXPO(3)%70 + EXPO(6)%30	4.65	Ampirik	4.61	4.66
8	EXPO(3)%80 + EXPO(6)%20	3.61	Ampirik	3.65	3.63
9	EXPO(3)%90 + EXPO(6)%10	2.8	Ampirik	2.81	2.81

EXPO(3) + EXPO(6) veri seti için oluşturulan ampirik dağılımlar EK-6'da verilmiştir.

$\mu_1/\mu_2 = 2$ olduğu durumlarda, μ_1/μ_2 değeri 1'den uzaklaşması sebebiyle c^2 testi sonucunda sadece ilk 3 durumda bilinen bir Gamma dağılımına uyduğu tespit edilmiştir ve tüm durumlar için c^2 testi sonuçları, c^2 testi sonucuna bağlı olarak hesaplanan teorik sonuçlar, saf ve normal karma dağılıma ait sonuçları Çizelge 4.21.'de gösterilmiştir.



EXPO(3)%10 + EXPO(6)%90: Kırmızı - EXPO(3)%20 + EXPO(6)%80: Mavi - EXPO(3)%30 + EXPO(6)%70: Yeşil - EXPO(3)%40 + EXPO(6)%60: Pembe EXPO(3)%50 + EXPO(6)%50: Sarı - EXPO(3)%60 + EXPO(6)%40: Mor - EXPO(3)%70 + EXPO(6)%30: Gri - EXPO(3)%80 + EXPO(6)%20: Turuncu - EXPO(3)%90 + EXPO(6)%10: Kahverengi

Şekil 4.38. $\mu_1/\mu_2 = 2$ olduğu her bir durum için yoğunluk fonksiyonları

$\mu_1/\mu_2 = 1.5$ durumuna benzer şekilde, $\mu_1/\mu_2 = 2$ durumunda da, EXPO(6) dağılımın karma oranı azaldıkça yoğunluk fonksiyonu sivrilmeye başlamıştır.

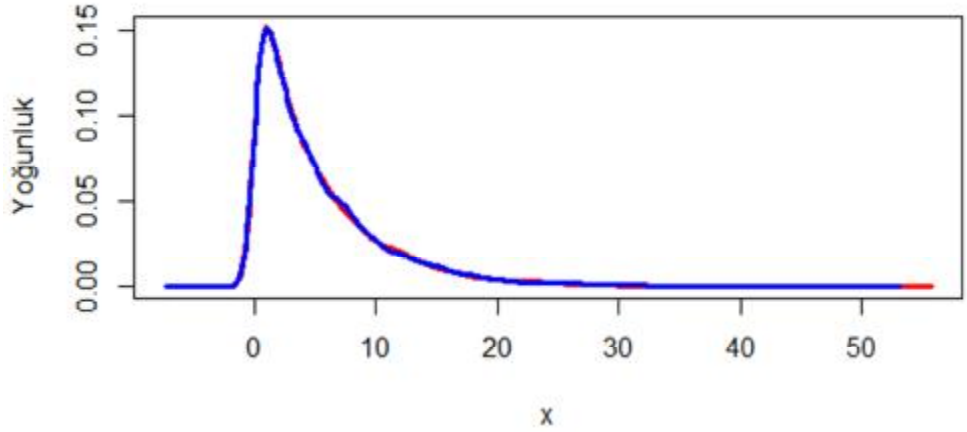
Çizelge 4.22. $\mu_1 / \mu_2 = 2$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler

	İşlem Süresi $\mu_1 / \mu_2 = 2$	***k***	**TAHMİN EDİLEN PARAMETRELER**	**TOPLAM PARAMETRELER**
1	EXPO(3)%10 + EXPO(6)%90	7	N~(0.22, 0.13) %6.74 + N~(0.79, 0.34) %11.93 + N~(1.93, 0.69) % 19.23 + N~(20.51, 8.08) %6.13 + N~(3.88, 1.23) %20.05 + N~(6.73, 2.04) %18.88 + N~(11.38, 3.65) %17.04	N~(5.72,5.9)
2	EXPO(3)%20 + EXPO(6)%80	7	N~(0.21, 0.13) %6.88 + N~(0.76, 0.32) %12.57 + N~(3.68, 1.18) %19.91 + N~(20.28, 8.05) %5.52 + N~(1.85, 0.67) %19.51 + N~(6.43, 1.98) %19.27 + N~(11.15, 3.62) %16.34	N~(5.38, 5.69)
3	EXPO(3)%30 + EXPO(6)%70	8	N~(0.6074, 0.044) %2.28 + N~(0.29, 0.13) %6.47 + N~(0.82, 0.32) %13.23 + N~(1.85, 0.64) %18.39 + N(3.53, 1.11) %19.1 + N~(6.16, 1.89) %19.68 + N~(19.97, 7.89) %4.94 + N~(10.87, 3.58) %15.91	N~(5.08, 5.42)
4	EXPO(3)%40 + EXPO(6)%60	8	N~(0.097, 0.06) %3.39 + N~(0.36, 0.16) %7.94 + N~(0.92, 0.35) %14.14 + N~(1.98, 0.66) %18.52 + N(3.67, 1.13) %19.7 + N~(6.33, 1.91) %17.93 + N~(10.94, 3.57) %14.02 + N~(19.93, 7.73) %4.36	N~(4.78, 5.22)
5	EXPO(3)%50 + EXPO(6)%50	8	N~(0.063, 0.036) %2.26 + N~(0.28, 0.13) %7.67 + N~(0.81, 0.32) %14.44 + N~(1.83, 0.65) %20.06 + N(6.19, 1.93) %18.78 + N~(3.52, 1.14) %20.85 + N~(11.06, 3.59) %12.72 + N~(20.94, 7.52) %3.22	N~(4.48, 4.96)

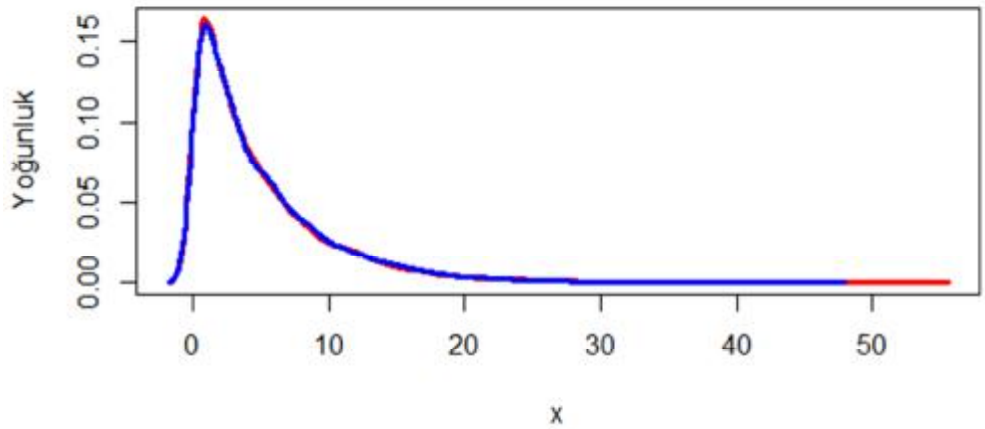
Çizelge 4.22. Devamı

6	EXPO(3)%60 + EXPO(6)%40	8	N~(0.093, 0.059) %3.77 + N~(11.15, 3.6) %10.68 + N~(0.36, 0.16) %9.16 + N~(0.95, 0.36) %16.12+ N(2.03, 0.68) %20.52 + N~(3.8, 1.2) %20.37 + N~(6.42, 1.96) %16.83 + N~(21.15, 7.64) %2.55	N~(4.19, 4.68)
7	EXPO(3)%70 + EXPO(6)%30	8	N~(0.35, 0.15) %9.37 + N~(0.094, 0.059) %4.13 + N~(0.902, 0.33) %15.79 + N~(10.28, 3.45) %11.4 + N(1.87, 0.61) %18.91 + N~(3.29, 1) %18.51 + N~(5.62, 1.75) %19.6 + N~(20.12, 7.44) %2.29	N~(3.87, 4.33)
8	EXPO(3)%80 + EXPO(6)%20	8	N~(0.108, 0.067) %5.13 + N~(0.38, 0.16) %10.14 + N~(0.94, 0.33) %16.81 + N~(1.89, 0.59) %18.07 + N(3.26, 0.97) %19.09 + N~(5.58, 1.71) %19.15 + N~(10, 3.36) %9.72 + N~(19.31, 7.29) %1.89	N~(3.57, 3.96)
9	EXPO(3)%90 + EXPO(6)%10	8	N~(0.11, 0.068) %5.44 + N~(0.38, 0.16) %10.27 + N~(0.92, 0.33) %17.32 + N~(3.19, 0.96) %19.08 + N(1.85, 0.58) %18.39 + N~(5.45, 1.7) %19.51 + N~(9.82, 3.43) %8.86 + N~(18.84, 7.69) %1.13	N~(3.29, 3.56)

BIC değeri ile tespit edilen k bileşen sayısına göre EM algoritması çalıştırılarak her bir bileşen için yapılan parametre tahminleri Çizelge 4.22.'de gösterilmektedir.



Şekil 4.39. %20 ‘si EXPO(3) ve %80’i EXPO(6) (kırmızı) ile tahmin edilen yedi normal dağılımdan oluşan karma (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları



Şekil 4.40. %30’u EXPO(3) ve %70’i EXPO(6) (kırmızı) ile oluşturulan ampirik (mavi) dağılımın yoğunluk fonksiyonları

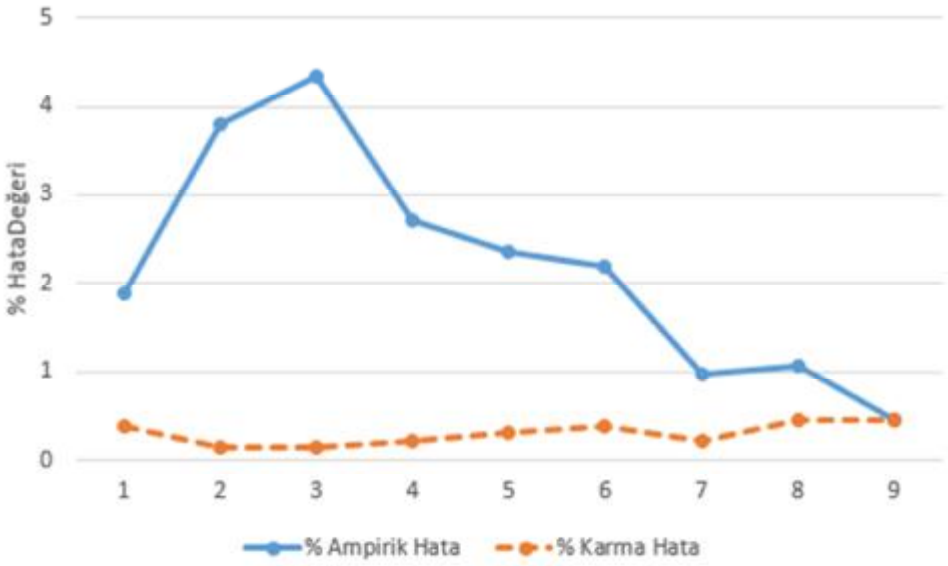
Saf dağılımlar için Mann-Whitney U testi değerleri Çizelge 4.23.’te ilk 3 durum c^2 testine uyan Gamma dağılımı için, diğer durumlarda 300 kategoriye ayrılmış ampirik dağılım için, karma durumlar için olan değerler ise BIC testi sonucunda tahmin edilen k bileşen sayısı için uygulanan EM algoritması ile tahmin edilen parametreler için gösterilmektedir.

Çizelge 4.23. İşlem Süresi $\mu_1 / \mu_2 = 2$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması

	İşlem Süresi $\mu_1 / \mu_2 = 2$	**Mann- Whitney U Saf**	**Mann- Whitney U Karma**
1	EXPO(3)%10 + EXPO(6)%90	0.63	0.73
2	EXPO(3)%20 + EXPO(6)%80	0.24	0.54
3	EXPO(3)%30 + EXPO(6)%70	0.30	0.57
4	EXPO(3)%40 + EXPO(6)%60	0.96	0.65
5	EXPO(3)%50 + EXPO(6)%50	0.97	0.55
6	EXPO(3)%60 + EXPO(6)%40	0.96	0.77
7	EXPO(3)%70 + EXPO(6)%30	0.97	0.45
8	EXPO(3)%80 + EXPO(6)%20	0.95	0.62
9	EXPO(3)%90 + EXPO(6)%10	0.96	0.54

Çizelge 4.24. $\mu_1 / \mu_2 = 2$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri

DURUM	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
SAF	1.89	3.81	4.34	2.71	2.37	2.19	0.97	1.07	0.44
KARMA	0.38	0.14	0.15	0.21	0.31	0.37	0.22	0.44	0.46



Şekil 4.41. $\mu_1 / \mu_2 = 2$ olduğu durumlar için % hata değerleri

Şekil 4.41'de görüldüğü üzere, 9. durum dışında tüm durumlarda normal karma dağılım yaklaşımı %1 bağıl hatadan bile düşük olacak şekilde ortalama kuyrukta bekleme süresini hesaplamıştır. 9. durumda ise, ampirik dağılım yaklaşımı sadece %0.02'lik bir fark ile daha doğru sonuç verdiği tespit edilmiştir.

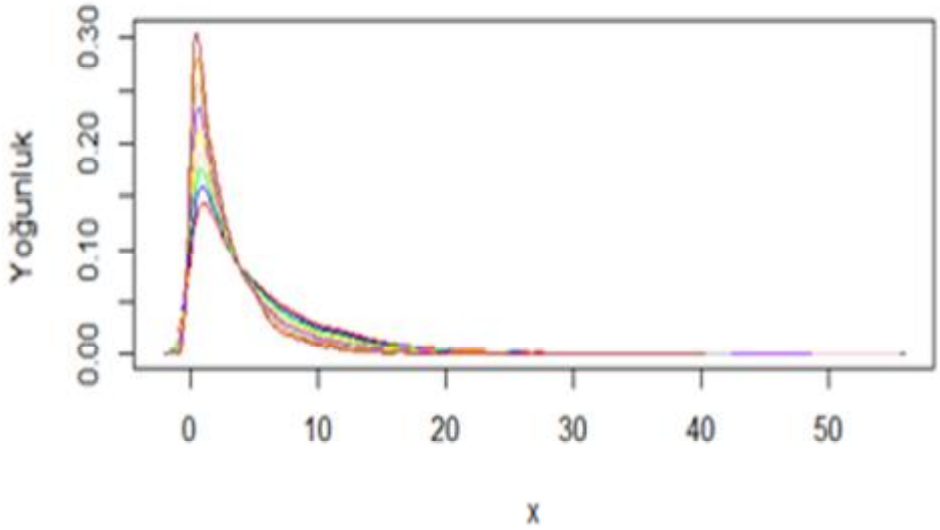
4.2.3. $\mu_1/\mu_2 = 2.5$ Olduğu Durum

Çizelge 4.25'te görüldüğü üzere, μ_1/μ_2 değeri arttıkça karma dağılım karakteri ortaya çıktığı için χ^2 testi sadece 1. durumda anlamlıdır ve Gamma dağılımına uyar. Bu durum dışındaki tüm durumlar için 300 kategoriye ayrılmış ampirik dağılım kurulması gerekmektedir.

Çizelge 4.25. $\mu_1 / \mu_2 = 2.5$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve χ^2 testi sonuçları

	Gelişler arası süre: EXPO(7.5)	**TEORİK**	χ^2	**SAF**	**KARMA**
	İşlem Süresi $\mu_1/\mu_2 = 2.5$	$W_q(dk)$	***P < 0.1 = Ret***	$W_q(dk)$	$W_q(dk)$
1	EXPO(2.4)%10 + EXPO(6)%90	18.35	GAMMA(6.05,0.937) p = 0.274	18.30	18.40
2	EXPO(2.4)%20 + EXPO(6)%80	13.45	Ampirik	12.89	13.45
3	EXPO(2.4)%30 + EXPO(6)%70	10.24	Ampirik	9.80	10.27
4	EXPO(2.4)%40 + EXPO(6)%60	8.04	Ampirik	7.74	8.06
5	EXPO(2.4)%50 + EXPO(6)%50	6.24	Ampirik	6.11	6.23
6	EXPO(2.4)%60 + EXPO(6)%40	4.83	Ampirik	4.71	4.82
7	EXPO(2.4)%70 + EXPO(6)%30	3.61	Ampirik	3.57	3.63
8	EXPO(2.4)%80 + EXPO(6)%20	2.63	Ampirik	2.65	2.64
9	EXPO(2.4)%90 + EXPO(6)%10	1.85	Ampirik	1.96	1.86

EXPO(2.4) + EXPO(6) veri seti için oluşturulan ampirik dağılımlar EK-7'de verilmiştir.



EXPO(2.4)%10 + EXPO(6)%90: Kırmızı - EXPO(2.4)%20 + EXPO(6)%80: Mavi - EXPO(2.4)%30 + EXPO(6)%70: Yeşil - EXPO(2.4)%40 + EXPO(6)%60: Pembe EXPO(2.4)%50 + EXPO(6)%50: Sarı - EXPO(2.4)%60 + EXPO(6)%40: Mor - EXPO(2.4)%70 + EXPO(6)%30: Gri - EXPO(2.4)%80 + EXPO(6)%20: Turuncu - EXPO(2.4)%90 + EXPO(6)%10: Kahverengi

Şekil 4.42. $\mu_1 / \mu_2 = 2.5$ olduğu her bir durum için yoğunluk fonksiyonları

$\mu_1 / \mu_2 = 1.5$ ve $\mu_1 / \mu_2 = 2$ durumlarına benzer şekilde, $\mu_1 / \mu_2 = 2.5$ durumunda da, EXPO(6) dağılımın karma oranı azaldıkça yoğunluk fonksiyonu sivrilmeye başlamıştır.

Çizelge 4.26. $\mu_1/\mu_2 = 2.5$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler

	İşlem Süresi $\mu_1/\mu_2 = 2.5$	***k***	**TAHMİN EDİLEN PARAMETRELER**	**TOPLAM PARAMETRELER**
1	EXPO(2.4)%10 + EXPO(6) %90	7	N~(0.75, 0.32) %11.88 + N~(0.21, 0.13) %6.64 + N~(1.84, 0.66) % 18.82 + N~(3.66, 1.15) %19.01 + N~(6.36, 1.92) %18.95 + N~(11.02, 3.55) %18.17 + N~(20.22, 8.04) %6.53	N~(5.67, 5.92)
2	EXPO(2.4)%20 + EXPO(6) %80	8	N~(0.19, 0.12) %6.95 + N~(0.73,0.31) %13.25 + N~(1.82, 0.66) %20.32 + N~(6.05, 1.79) %17.98 + N~(3.55, 1.12) %18.41 + N~(10.37, 3.07) %15.93 + N~(27.47, 8.88) %1.3 + N~(17.7, 5.32) %5.86	N~(5.26, 5.68)
3	EXPO(2.4)%30 + EXPO(6) %70	8	N~(0.08, 0.48) %2.84 + N~(0.79, 0.3) %13.77 + N~(0.29, 0.12) %6.74 + N~(1.85, 0.65) %20.02 + N(3.61, 1.15) %19.43 + N~(6.21, 1.89) %16.95 + N~(10.77, 3.5) %15.18 + N~(19.88, 7.87) %5.07	N~(4.89, 5.42)
4	EXPO(2.4)%40 + EXPO(6) %60	8	N~(0.095, 0.05) %3.92 + N~(0.35, 0.15) %8.44 + N~(0.87, 0.32) %14.12 + N~(1.88, 0.63) %19.58 + N(3.51, 1.1) %19.29 + N~(6.06, 1.85) %16.11 + N~(10.56, 3.44) %13.93 + N~(19.63, 7.71) %4.61	N~(4.55, 5.18)

Çizelge 4.26. Devamı

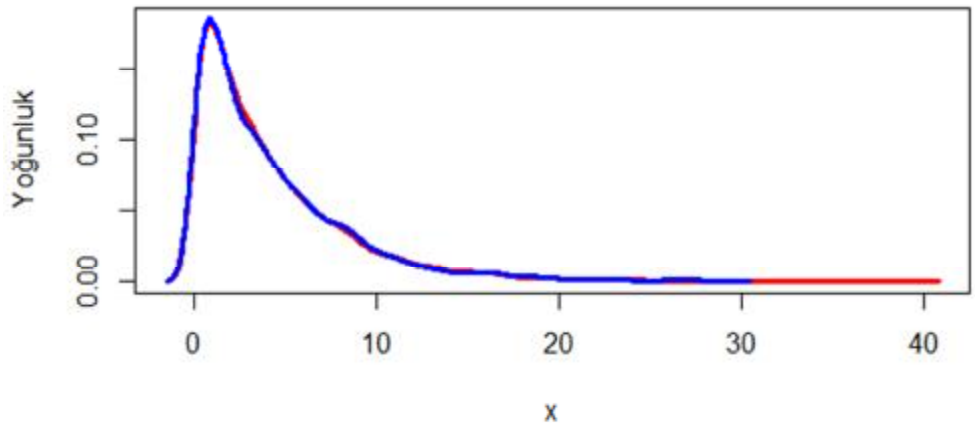
5	EXPO(2.4)%50 + EXPO(6) %50	8	N~(0.11, 0.071) %5.24 + N~(1.02, 0.38) %16.29 + N~(0.41, 0.18) %10.42 + N~(2.2, 0.013) %0.1+ N(2.21, 0.78) %22.69 + N~(19.16, 7.6) %4.22 + N~(4.48, 1.56) %24 + N~(9.26, 3.4) %17.04	N~(4.17, 4.88)
6	EXPO(2.4)%60 + EXPO(6) %40	9	N~(0.034, 0.019) %1.66 + N~(0.15, 0.07) %5.06 + N~(0.41, 0.15) %9.12 + N~(0.91, 0.32) %15.13+ N(1.9, 0.65) %21.65 + N~(3.63, 1.16) %21.39 + N~(6.4, 1.98) %14.54 + N~(21.16, 7.65) %2.48 + N~(11.13, 3.53) %8.97	N~(3.82, 4.56)
7	EXPO(2.4)%70 + EXPO(6) %30	8	N~(0.072, 0.044) %3.81 + N~(0.70, 0.26) %15.14 + N~(0.27, 0.12) %8.81 + N~(1.47, 0.48) %17.45 + N(2.63, 0.83) %20.11 + N~(4.73, 1.57) %20.41 + N~(9.27, 3.34) %11.76 + N~(19.31, 7.55) %2.51	N~(3.45, 4.16)
8	EXPO(2.4)%80 + EXPO(6) %20	8	N~(9.53, 3.26) %7.86 + N~(0.3, 0.13) %9.86 + N~(0.08, 0.05) %4.85 + N~(0.78, 0.28) %17.58 + N(5.35, 1.7) %15.16 + N~(1.68, 0.56) %21.61 + N~(3.11, 1.01) %21.34 + N~(19.29, 7.47) %1.74	N~(3.09, 3.7)
9	EXPO(2.4)%90 + EXPO(6) %10	8	N~(0.08, 0.05) %5.19 + N~(0.3, 0.12) %10.25 + N~(0.75, 0.27) %17.85 + N~(1.5, 0.47) %18.1 + N(4.39, 1.33) %19.07 + N~(2.57, 0.75) %18.69 + N~(7.99, 2.8) %9.29 + N~(16.37, 7.51) %1.56	N~(2.75, 3.17)

Saf ve normal karma dağılımlar yaklaşımı için Mann-Whitney U testi sonuçları Çizelge 4.27'de gösterilmiştir. Saf dağılımlarda birinci durum için parametreleri c^2 testi ile tespit edilen gamma dağılımın üretilen veriler ile karşılaştırılarak elde edilen, diğer durumlar ise verilerin 300 kategoriye ayrılarak oluşturulan ampirik dağılımlar üretilen veriler ile karşılaştırılarak hesaplanan değerlerini göstermektedir. Karma dağılımlar için Mann-Whitney U testi değerleri ise, normal karma dağılımı yaklaşımı ile tahmin edilen normal dağılımların üretilen veriler ile karşılaştırılarak hesaplanan değerleridir.

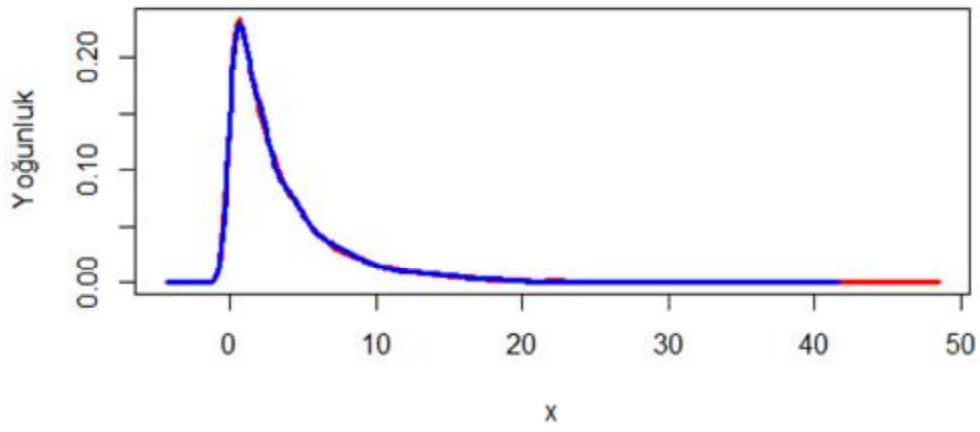
Çizelge 4.27. İşlem Süresi $m_1/m_2 = 2.5$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması

	İşlem Süresi $m_1/m_2 = 2.5$	**Mann- Whitney U Saf**	**Mann- Whitney U Karma**
1	EXPO(2.4)%10 + EXPO(6)%90	0.35	0.87
2	EXPO(2.4)%20 + EXPO(6)%80	0.96	0.48
3	EXPO(2.4)%30 + EXPO(6)%70	0.98	0.68
4	EXPO(2.4)%40 + EXPO(6)%60	0.97	0.48
5	EXPO(2.4)%50 + EXPO(6)%50	0.98	0.65
6	EXPO(2.4)%60 + EXPO(6)%40	0.95	0.56
7	EXPO(2.4)%70 + EXPO(6)%30	0.98	0.42
8	EXPO(2.4)%80 + EXPO(6)%20	0.99	0.76
9	EXPO(2.4)%90 + EXPO(6)%10	0.86	0.76

Tahmin edilen normal karma dağılımlar için Mann-Whitney U değerleri incelendiğinde üretilen veriler ile aynı kütleden geldiği görülmektedir.



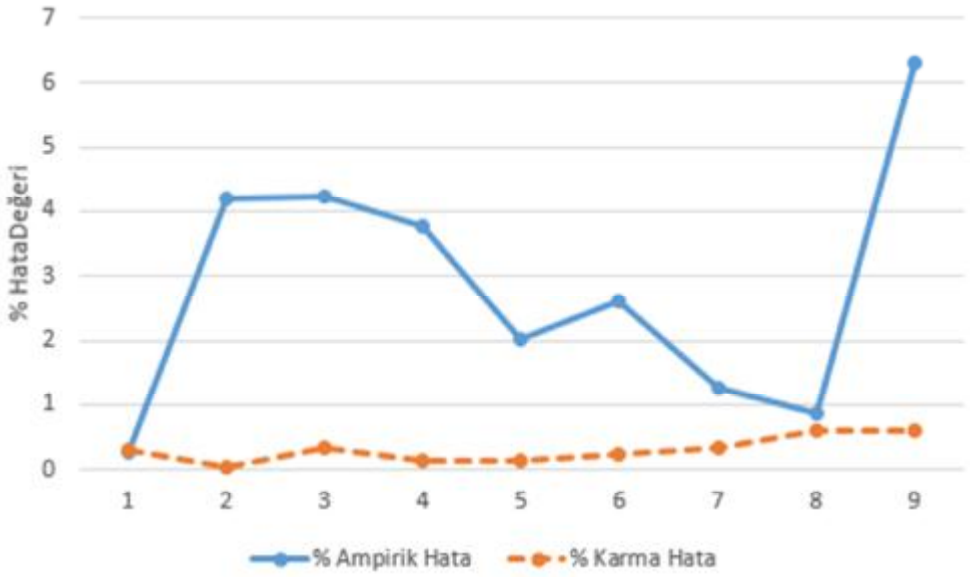
Şekil 4.43. %10'u EXPO(2.4) ve %90'ı EXPO(6) (kırmızı) ile GAMMA(6.05,0.937) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları



Şekil 4.44. %60'ı EXPO(2.4) ve %40'ı EXPO(6) (kırmızı) ile yedi normal dağılımdan oluşan karma (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları

Çizelge 4.28. $\mu_1 / \mu_2 = 2.5$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri

DURUM	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
SAF	0.25	4.19	4.24	3.75	2.03	2.62	1.27	0.86	6.30
KARMA	0.3	0.02	0.32	0.15	0.12	0.24	0.34	0.6	0.59



Şekil 4.45. $\mu_1/\mu_2=2.5$ olduğu durumlar için % hata değerleri

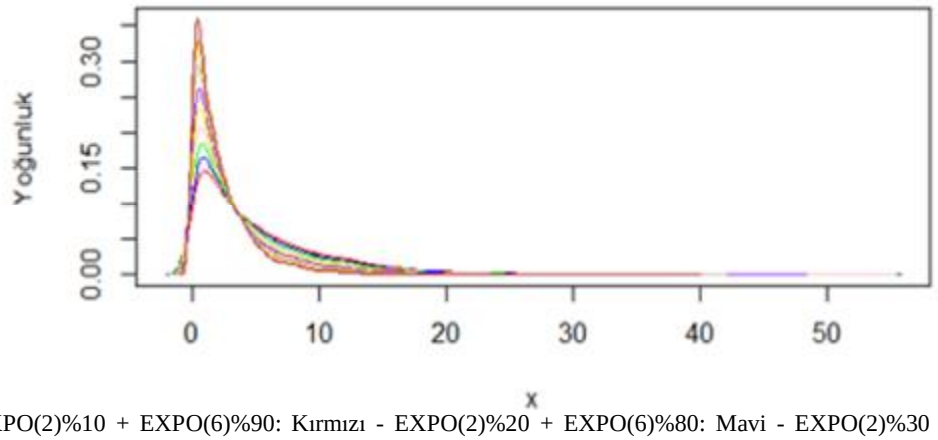
İlk durum dışındaki tüm durumlarda normal karma dağılım yaklaşımı ampirik dağılım yaklaşımına göre çok daha doğru sonuç verdiği saptanmıştır. 1. ve 9. durumlarda %90'ı bir dağılımdan oluştuğu için tek bir dağılım gibi davranma ve buna bağlı olarak ampirik dağılımın normal karma dağılım yaklaşımına göre daha iyi sonuç vermesi durumu ortaya çıkabilir.

4.2.4. $m_1/m_2 = 3$ Olduğu Durum

Çizelge 4.29. $m_1/m_2 = 3$ olduğu durum için teorik, saf ve karma dağılımlar yaklaşımıyla elde edilen W_q ve c^2 testi sonuçları

	Gelişler arası süre: EXPO(7.5)	**TEORİK**	c^2	**SAF**	**KARMA**
	İşlem Süresi $m_1/m_2=3$	$W_q(dk)$	***p < 0.1 = Ret***	$W_q(dk)$	$W_q(dk)$
1	EXPO(2)%10 + EXPO(6)%90	17.83	GAMMA(6.108,0.922) p = 0.3334	17.84	17.85
2	EXPO(2)%20 + EXPO(6)%80	12.85	Ampirik	12.34	12.85
3	EXPO(2)%30 + EXPO(6)%70	9.63	Ampirik	926	9.63
4	EXPO(2)%40 + EXPO(6)%60	7.43	Ampirik	7.18	7.44
5	EXPO(2)%50 + EXPO(6)%50	5.64	Ampirik	5.52	5.70
6	EXPO(2)%60 + EXPO(6)%40	4.27	Ampirik	4.15	4.28
7	EXPO(2)%70 + EXPO(6)%30	3.10	Ampirik	3.05	3.12
8	EXPO(2)%80 + EXPO(6)%20	2.16	Ampirik	2.13	2.15
9	EXPO(2)%90 + EXPO(6)%10	1.40	Ampirik	1.38	1.41

EXPO(2) + EXPO(6) veri seti için oluşturulan ampirik dağılımlar EK-8'de verilmiştir.



EXPO(2)%10 + EXPO(6)%90: Kırmızı - EXPO(2)%20 + EXPO(6)%80: Mavi - EXPO(2)%30 + EXPO(6)%70: Yeşil - EXPO(2)%40 + EXPO(6)%60: Pembe EXPO(2)%50 + EXPO(6)%50: Sarı - EXPO(2)%60 + EXPO(6)%40: Mor - EXPO(2)%70 + EXPO(6)%30: Gri - EXPO(2)%80 + EXPO(6)%20: Turuncu - EXPO(2)%90 + EXPO(6)%10: Kahverengi

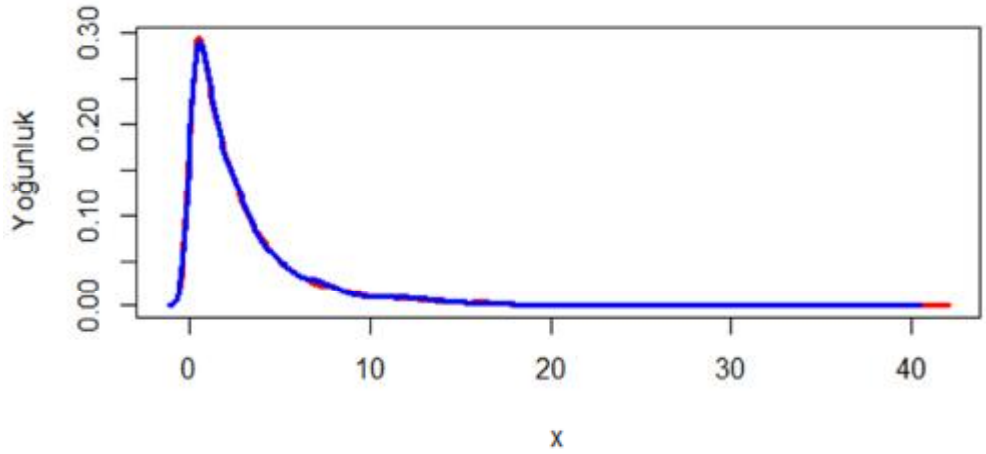
Şekil 4.46. $\mu_1 / \mu_2 = 3$ olduğu her bir durum için yoğunluk fonksiyonları

Çizelge 4.30. $\mu_1 / \mu_2 = 3$ durumlar için BIC testi sonucu bulunan k bileşen sayısı ve EM algoritması ile tahmin edilen parametreler

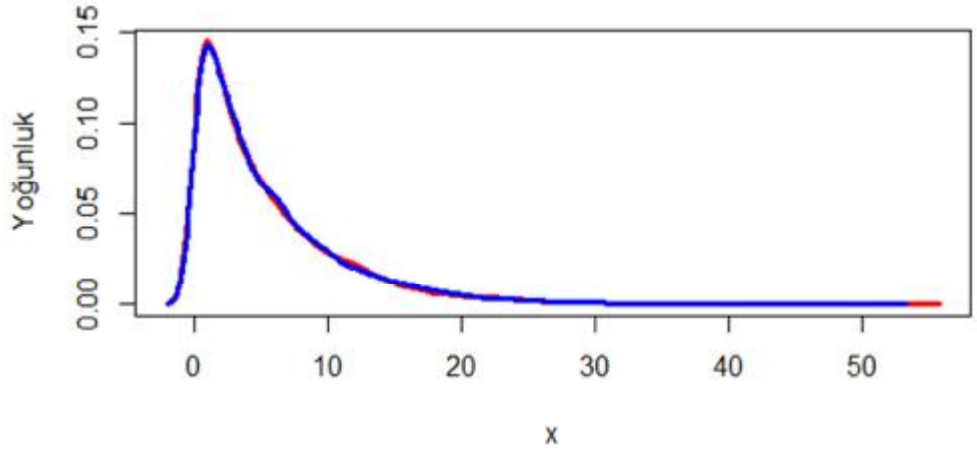
	İşlem Süresi $\mu_1/\mu_2=3$	***k***	**TAHMİN EDİLEN PARAMETRELER**	**TOPLAM PARAMETRELER**
1	EXPO(2)%10 + EXPO(6)%90	7	N~(0.19, 0.12) %6.38 + N~(0.71, 0.3) %11.8 + N~(1.78, 0.65) % 19.07 + N~(3.57, 1.16) %18.88 + N~(6.27, 1.93) %18.95 + N~(10.93, 3.55) %18.33 + N~(20.15, 8.03) %6.59	N~(5.62, 5.92)
2	EXPO(2)%20 + EXPO(6)%80	8	N~(0.18, 0.11) %6.88 + N~(0.68,0.3) %13.49 + N~(1.76, 0.65) %20.84 + N~(6.02, 1.8) %17.47 + N~(3.48, 1.12) %18.34 + N~(10.29, 3.06) %15.67 + N~(27.35, 8.88) %1.34 + N~(17.57, 5.31) %5.97	N~(5.18, 5.69)
3	EXPO(2)%30 + EXPO(6)%70	8	N~(0.07, 0.47) %3.09 + N~(0.73, 0.28) %13.54 + N~(0.28, 0.12) %6.7 + N~(1.74, 0.62) %20.57 + N(3.49, 1.14) %20.01 + N~(6.23, 1.93) %16.51 + N~(10.8, 3.53) %14.53 + N~(19.9, 7.88) %5.05	N~(4.77, 5.43)

Çizelge 4.30. Devamı

4	EXPO(2)%40 + EXPO(6)%60	9	N~(0.063, 0.039) %2.92 + N~(0.21, 0.089) %5.31 + N~(0.51, 0.18) %9.88 + N~(2.04, 0.64) %19.46 + N(1.04, 0.35) %13.5 + N~(3.73, 1.14) %18.49 + N~(6.51, 1.96) %13.93 + N~(10.9, 3.5) %12.12 + N~(19.9, 7.72) %4.39	N~(4.39, 5.18)
5	EXPO(2)%50 + EXPO(6)%50	9	N~(0.028, 0.015) %1.26 + N~(0.14, 0.068) %5.6 + N~(0.43, 0.17) %11.05 + N~(0.98, 0.35) %15.81 + N(2, 0.66) %20.68 + N~(3.73, 1.18) %19.73 + N~(6.71, 2.08) %13.29 + N~(11.39, 3.56) %9.49 + N~(21.19, 7.49) %3.12	N~(3.99, 4.9)
6	EXPO(2)%60 + EXPO(6)%40	9	N~(0.059, 0.037) %3.42 + N~(0.22, 0.09) %7.55 + N~(0.57, 0.21) %13.62 + N~(1.19, 0.39) %16.53+ N(11.15, 3.59) %8.22 + N~(2.17, 0.65) %18.19 + N~(3.7, 1.1) %17.23 + N~(6.41, 1.96) %12.75 + N~(21.2, 7.66) %2.49	N~(3.58, 4.53)
7	EXPO(2)%70 + EXPO(6)%30	9	N~(0.232, 0.1) %8.54 + N~(0.062, 0.038) %3.89 + N~(10.74, 3.45) %7.17 + N~(0.58, 0.21) %14.57 + N(1.18, 0.38) %16.28 + N~(2.09, 0.61) %18.74 + N~(6.08, 1.83) %11.33 + N~(3.56, 1.05) %17.54 + N~(20.99, 7.44) %1.94	N~(3.18, 4.09)
8	EXPO(2)%80 + EXPO(6)%20	8	N~(0.25, 0.1) %9.61 + N~(0.07, 0.04) %4.77 + N~(0.65, 0.23) %17.42 + N~(1.42, 0.48) %21.62 + N(2.69, 0.9) %22.49 + N~(4.79, 1.63) %14.79 + N~(18.52, 7.53) %1.9 + N~(8.85, 3.18) %7.4	N~(2.76, 3.55)
9	EXPO(2)%90 + EXPO(6)%10	8	N~(0.07, 0.04) %5.05 + N~(0.25, 0.1) %10.3 + N~(1.27, 0.41) %18.67 + N~(0.63, 0.22) %17.79 + N(3.81, 1.2) %18.62 + N~(2.22, 0.67) %19.33 + N~(7.16, 2.57) %8.62 + N~(15.86, 7.56) %1.62	N~(2.39, 2.94)



Şekil 4.47. %70'i EXPO(2) ve %30'u EXPO(6) (kırmızı) ve dokuz normal dağılımdan oluşan karma (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları



Şekil 4.48. %10'u EXPO(2) ve %90'ı EXPO(6) (kırmızı) ile GAMMA(6.108,0.922) (mavi) dağılımlarının yoğunluk fonksiyonları

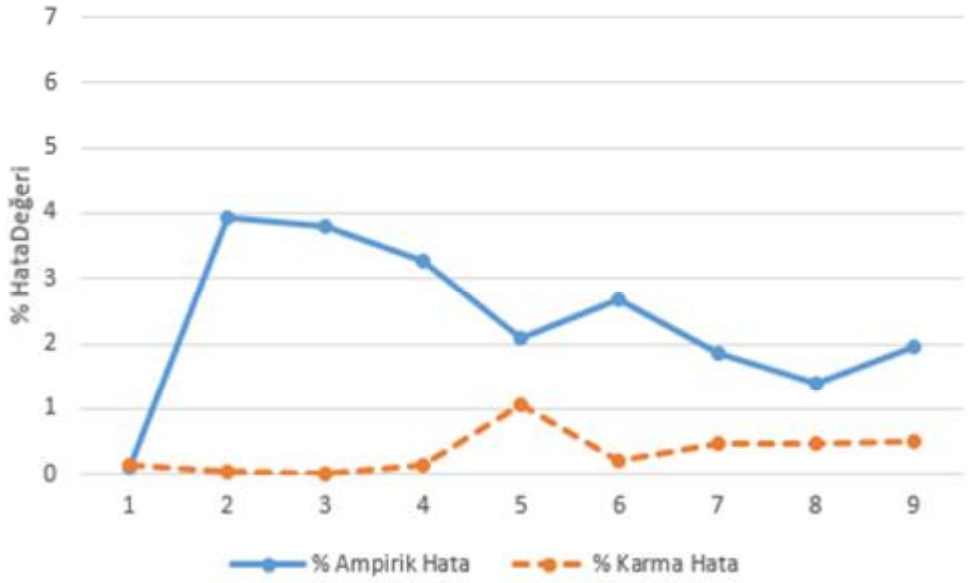
Çizelge 4.31. İşlem Süresi $m_1 / m_2 = 3$ olduğu durumlar için saf ve normal karma dağılım yaklaşımı sonucunda üretilen verilerin gerçek veriler ile Mann-Whitney U testi karşılaştırılması

	İşlem Süresi $m_1/m_2=3$	**Mann- Whitney U Saf**	**Mann- Whitney U Karma**
1	EXPO(2)%10 + EXPO(6)%90	0.29	0.79
2	EXPO(2)%20 + EXPO(6)%80	0.95	0.52
3	EXPO(2)%30 + EXPO(6)%70	0.97	0.74
4	EXPO(2)%40 + EXPO(6)%60	0.98	0.79
5	EXPO(2)%50 + EXPO(6)%50	0.97	0.64
6	EXPO(2)%60 + EXPO(6)%40	0.96	0.67
7	EXPO(2)%70 + EXPO(6)%30	0.96	0.63
8	EXPO(2)%80 + EXPO(6)%20	0.99	0.62
9	EXPO(2)%90 + EXPO(6)%10	0.99	0.86

$m_1 / m_2 = 3$ durumu için saf ve normal karma dağılımlar yaklaşımı için Mann-Whitney U testi sonuçları Çizelge 4.31'deki gibidir. Saf dağılımlarda birinci durum için parametreleri c^2 testi ile tespit edilen gamma dağılımın üretilen veriler ile karşılaştırılarak elde edilen verilerin Mann-Whitney U testi sonucunda hesaplanan p değeri, ampirik dağılım ile oluşturulan fonksiyonlar ile elde edilen verilerden daha düşüktür fakat Şekil 4.48.'de görüldüğü üzere Gamma dağılımı test verilerini temsil etmektedir.

Çizelge 4.32. $\mu_1 / \mu_2 = 3$ olduğu durumlar için saf ve karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen kuyrukta bekleme sürelerinin teorik sonuçla karşılaştırılmasıyla elde edilen % hata değerleri

DURUM	1	2	3	4	5	6	7	8	9
SAF	0.09	3.93	3.8	3.27	2.10	2.68	1.84	1.38	1.95
KARMA	0.12	0.03	0.01	0.12	1.05	0.21	0.48	0.46	0.50



Şekil 4.49. $\mu_1 / \mu_2 = 3$ olduğu durumlar için % hata değerleri

Çizelge 4.32 ve Şekil 4.49. incelendiğinde, 1. durum dışındaki tüm durumlarda, normal karma dağılım yaklaşımının ampirik dağılım yaklaşımına göre teorik sonuçlara daha yakın sonuçlar elde ettiği gözlemlenmiştir. 1. durumda c^2 testi anlamlı olan bir dağılım söz konusu olduğu için saf dağılım yaklaşımı daha üstün görülse bile, normal karma dağılımı yaklaşımının da % bağıl hatası çok düşüktür.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kuyruk modelinin kurulabilmesi için toplanan verilerin herhangi bir bilinen dağılıma uymadığı durumlarda oluşturulması gereken ampirik dağılım yaklaşımının, normal karma dağılımı yaklaşımı ile karşılaştırılıp yorumlanması amaçlanmıştır. Bu amaçla işlem süresinde kullanılmak üzere, normal karma dağılımlarda D = 1.5, 2, 2.5, 3 ve üstel karma dağılımlarda μ_1/μ_2 = 1.5, 2, 2.5, 3 olacak şekilde tüm durumlarda %10'luk değişen tüm karma oranları için sistematik bir şekilde üretilmiştir.

Kuyruk sistemi için toplanan veriler çoğu zaman herhangi bir dağılıma uymaz ve ampirik dağılım oluşturmak gerekebilir. Ampirik dağılım oluşturmak, özellikle verilerin fazla veya belirli bir aralığa yığılma mevcutsa fazla kategoriye bölünmesi gerektiği için zaman alabilir. Normal karma dağılım yaklaşımında, veriler BIC değeri sonucunda birbirine benzer veriler sınıflandırılarak normal dağılım bileşenleri oluşturulmuş ve oluşturulan her bir bileşenin ortalama ve standart sapma değerleri EM algoritması ile bulunmuştur. Tahmin edilen bu değerler için sayılar üretilip test verileriyle karşılaştırılmış ve Mann-Whitney U testi ile aynı kütleden geldiği ispat edilmiştir. Ampirik dağılımlar oluşturulurken, verilerin belirli bir aralığa yığılmadığı normal karma dağılımlarda 50 kategoriye bölmek yeterli olurken, küçük bir aralıkta fazla veriye sahip olan üstel karma dağılım uygulamalarında 300 kategoriye bölünmüştür. Bu ampirik dağılımlar Ek olarak verilmiştir. Ampirik dağılımlar ve normal karma dağılımlar karşılaştırılırken %10-%90'lık karma oranlarının oluşturan 1. ve 9. durumlarda karma karakterinin düşük olması nedeniyle, normal karma dağılım sonuçlarından elde edilen %bağıl hatalar yüksek olabilir. Bu istisnai durumlar göz önünde bulundurularak yorumlamak önemlidir.

İşlem süresinin normal karma dağılımlardan oluştuğu kuyruk sistemlerinden elde edilen sonuçlar incelenecek olursa, D=1.5 olan durumda, tüm

karma oranlarında ampirik dağılım normal karma dağılım yaklaşımına göre, daha düşük % bağıl hata değeri vermiştir. Bu sebebi, D'nın 1'e yakın olması sebebiyle karma karakterinin düşük olması ve tek bir dağılım şeklinde davranma eğilimidir. Bu nedenle normal karma dağılım yaklaşımı D değerinin 1'e yakın olduğu durumlarda iyi çalışmaz.

$D = 2$ olduğu durumda ise, karma karakteri artmaya başlaması nedeniyle en düşük % bağıl hata normal karma dağılım yaklaşımıyla karma oranının en yakın olduğu N~(6, 2) %50 + N~(10, 2) %50 durumunda tespit edilmiştir.

D arttıkça karma dağılımı oluşturan normal dağılımlar birbirinden ayrılarak daha görünür ve ayrıştırılabilir hale gelir. D = 1.5, 2, 2.5 ve 3 olan durumlar için tahmin edilen parametreler incelendiği zaman Mahalanobis uzaklığı arttıkça, karma dağılım yaklaşımın tahmin edilen parametrelerin test verilerine yaklaştığı, ortalama ve standart sapmalar için hesaplanan % bağıl hata değerlerinin giderek düştüğü ve buna bağlı olarak Mann-Whitney U p değerinin 1'e yaklaştığı görülmüştür.

Fakat D uzaklığı arttıkça, karma dağılım yaklaşımının daha iyi sonuç vermesi beklenirken böyle bir sonuçla karşılaşılamamıştır. Fakat % hatalar incelenecek olursa; hem ampirik dağılım ve karma dağılım yaklaşımı teorik sonuçlara son derece yakındır. 50 kategori ile ampirik dağılım için geçerlilik sağlanan fonksiyon ile karma dağılım yaklaşımı arasında net bir seçim yapabilmek bu sebeple mümkün değildir. Fakat test verilerini kayıp olmadan temsil edebilmek anlamında birden fazla tepe noktasının ya da geniş tepelerin olduğu durumlarda normal karma dağılımın kullanılması önerilebilir. Benzer şekilde veri setinde çok fazla örneklem bulunuyorsa, ampirik dağılım oluşturmak uzun ve zahmetli olduğu olacağı için normal karma dağılım yaklaşımı kullanılabilir. İncelenen sistemde, karma dağılımın kullanılması gerekliliği, farklı iki işçinin kullandığı bir makine ya da mevsimsellik içeren üretim sayıları da olabilir. Bu gibi durumlarda da karma dağılım yaklaşımından yardım alınabilir.

İşlem süresinin üstel karma dağılımlardan oluştuğu kuyruk sistemlerinden elde edilen sonuçlar incelenecek olursa, μ_1/μ_2 oranı 1'e yaklaşıkça iki üstel dağılım birbirine benzemesi sebebiyle χ^2 testinin anlamlı çıktığı durum sayısı artmıştır. χ^2 testi sonucunda hesaplanan p değeri yükseldikçe, Mann-Whitney U testinde hesaplanan p değeri de yükselmiştir.

μ_1/μ_2 = 1.5 olan kuyruk sisteminde, ilk 4 durum χ^2 testi $p < 0.1$ seviyesinde anlamlı çıkmış ve üstel dağılım ailesine uyduğu görülmüştür. Eğer veri seti χ^2 testi sonucunda anlamlı çıkıyorsa, normal karma dağılım yaklaşımının kullanılmasına gerek olmadığı görülmektedir. χ^2 testinde bilinen herhangi bir dağılıma uymayan durumlarda, veri seti belirli bir aralığa yoğun bir şekilde yığılmış ve üstel dağılım formu gösteriyorsa normal karma dağılım yaklaşımıyla %0.5'ten daha küçük bağıl hatalar ile kuyrukta ortalama bekleme süreleri hesaplanabilmiştir.

μ_1/μ_2 = 2 olan kuyruk sisteminde, 9. durum hariç tüm durumlarda, ilk 3 durum χ^2 testi sonucunda Gamma dağılımına uyduğu tespit edilmesine rağmen, % bağıl hata normal karma dağılım yaklaşımı için daha düşük hesaplanmıştır. Bu kuyruk sisteminde normal karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen %bağıl hataların tamamı %0.5'in altındadır.

μ_1/μ_2 = 2.5 olan kuyruk sisteminde ise χ^2 testine göre gamma dağılımına uyan 1. durum hariç tüm durumlarda, normal karma dağılım yaklaşımı %0.6 bağıl hatadan daha düşük olacak şekilde ortalama kuyrukta bekleme süresini hesaplamıştır. Saf dağılım yaklaşımının daha doğru sonuç verdiği tek durum olan 1.durumda %bağıl hata 0.25 olarak hesaplanırken, normal karma dağılım yaklaşımıyla elde edilen sonuç %0.3'tür. Bu durum için hesaplanan iki yaklaşımın %bağıl hata farkının çok düşük olması, normal karma dağılım yaklaşımı χ^2 testine göre anlamlı olan veri setini başarılı bir şekilde temsil ettiği göstermektedir.

İşlem süresinin üstel karma dağılım olarak incelendiği son uygulama olan $= \mu_1 / \mu_2 = 3$ kuyruk sisteminde, $\mu_1 / \mu_2 = 2.5$ kuyruk sistemine benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bu uygulamada da 1.durum χ^2 testi sonucunda gamma dağılımına uymuş ve gamma dağılımına göre ortalama kuyrukta bekleme süresi teorik sonuç ile karşılaştırıldığında %0.09 bağıl hata, aynı verilerin normal karma dağılımı yaklaşımında ise teorik sonuca %0.12 bağıl hata sapmasında hesaplandığı görülmüştür. Bu durum dışındaki diğer 8 durumda da normal karma dağılım yaklaşımının %0.5'ten daha düşük bağıl hatalarla ortalama kuyrukta bekleme süresini hesapladığı ve Mann-Whitney U testi sonucunda p değeri 0.95-0.99 aralığında olan ampirik dağılımlardan daha üstün olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak iki normal dağılımdan ya da iki üstel dağılımdan oluşan veri setleri, normal dağılım gruplarına bölünerek temsil edilebilir ve bu şekilde kuyruk teorisinde kullanılarak kuyrukta ortalama bekleme süreleri hesaplanabilir. Özellikle üstel dağılımlardan oluşan bir veri setinde ampirik dağılım yaklaşımına göre çok daha iyi sonuç verdiği görülen normal karma dağılım yaklaşımı, üretim sistemlerinde oluşan mevsimselliklerin, aynı işi yapan farklı niteliklerdeki işçilerin ya da makinelerin temsil edilmesinde ya da ampirik dağılım oluşturulması gereken veri setlerinde rahatlıkla kullanılabilir.

KAYNAKLAR

Açıkgöz, İ. (2007). *Sonlu karma dağılımlarda parametre tahmini.* Ankara: Ankara Üniversitesi.

Adan, I., & Resing, J. (2001). Queueing Theory. I. Adan, & J. Resing içinde, *Queueing Theory.* Eindhoven: Department of Mathematics and Computing Science Eindhoven University of Technology.

Adan, I., & Resing, J. (2015). *Queueing Systems.* Eindhoven: Department of Mathematics and Computing Science.

Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. *Proc. 2nd International Symposium on Information Theory*, 267-281.

Akaike, H. (1974). A new look at the Statistical model identification. *IEEE Transaction Automatic Control*, 716-723.

Akdeniz, F. (2017). *Olasılık ve İstatistik.* Ankara: Akademisyen Kitabevi.

Akyol, M., & Gürbüz, F. (2002). Üç Yönlü Tablolarda ki-kare İstatistiğinin Kullanılması. *İstatistik Araştırma Dergisi DİE Yayınları*, 23-27.

Altıparmak, F. (2017, Ekim 2). *Rassal Sayı ve Rassal Değişken Üretimi.* http://w3.gazi.edu.tr/~fulyaal/Simulation/ENM316DERS5(4_Slayt).pdf: http://w3.gazi.edu.tr/~fulyaal/Simulation/ENM316DERS5(4_Slayt).pdf adresinden alındı

Altunışık, R., Coşkun, R., Bayraktaroğlu, S., & Yıldırım, E. (2005). *Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri.* Sakarya: Sakarya Kitabevi.

Andradóttir, S., Helay, K., Withers, D., & Nelson, B. (1997). Introduction to Modeling and Simulation. *Winter Simulation Conference.* New York: Binghamton.

Arabie, P., Hubert, L., & De Soete, G. (1996). *Clustering and Classification.* Singapore: World Scientific.

Aydın, Ö. (2016). *Simülasyon Çeşitleri.* Edirne: Trakya Üniversitesi.

Aytaç, M. (1998). *Matematiksel İstatistik.* Bursa: Uludağ Üniversitesi Basımev.

Banks, J. (1998). *Handbook of Simulation.* ABD: John Wiley & Sons Inc.

Banks, J., & Carson, J. (1985). *Discrete-event system simulation.* Michigan: Prentice-HalL.

Basford, K., & McLachnan, G. (1985). Likelihood Estimation with Normal Mixture Models. *Journal of the Royal Statistical Society*, 282-289.

Başol, G. (2013). *Olasılık Dağılımları.* Tokat: Gaziosmanpaşa Üniversitesi.

Behboodian, J. (1970). On a mixture normal distribution. *Biometrica*, 215-217.

Bhat, U. N. (2008). The General Queue G/G/1 and Approximations. *An Introduction to Queueing Theory*, 169-183.

Bhattacharya, C. (1967). A simple method of resolution of a distribution into Gaussian components. *Biometrics, 23*, 115-135.

Bircan, H., Karagöz, Y., & Kasapoğlu, Y. (2003). Ki-Kare ve Kolmogorov Smirnov Uygunluk Testlerinin Simülasyon ile Elde Edilen Veriler Üzerinde Karşılaştırılması. *C.Ü. İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi*, 69-80.

Blank, S. (1968). *Descriptive statistics.* Michigan: Appleton-Century-Crofts.

Bozdoğan, H. (1994). Mixture-Model Cluster Analysis Using Model Selection Criteria and a New Information Measure of Complexity. In Proceedings of the Fist US/Japan Conference on the Frontiers of Statistical Modeling: An Informational Approach. *Kluwer Academic Publisher*, 69-113.

Burnham, K., & Anderson, D. (1998). *Model Selection and multimodel inference.* New York: Springer.

Cassie, R. (1954). Some use of probability paper in the analysis of size-frequency distributions. *Aust. J. Mar. Freshwat*, 513-522.

Chatfield, C., & Goodhardt, G. J. (1973). A Consumer Purchasing Model with Erlang Interpurchase Times. *Journal of the American Statistical Association*, 828-835.

Cobb, B. R. (2013). Mixture distributions for modelling demand during lead time. *Journal of Operational Research Society*, 217-228.

Çalış, N. (2005). Karma Dağılım Modellerinde Bileşen Sayısını Tahmin Etmek İçin Yöntemler. *Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.

Daniel, W. (1990). *Applied Nonparametric Statistics.* Boston: PWS-KENT Puplishing Company.

Davenport, J. W., Bezdek, J. C., & Hathaway, R. J. (1988). Parameter Estimation for Finite Mixture Distributions. *Comut. Math. Applic.* , 819-828.

Dempster, A., Laird, N., & Rubin, D. (1977). Maximum likelihood form incomplete data via EM algorithm. *J. Roy. Stat. Soc.*, 1-38.

Dick, N., & Bowden, D. (1973). Maximum likelihood estimation of two normal distributions. *Biometrics, 29*, 780-781.

Duda, R., Hart, P., & Stork, D. (2001). *Pattern Classification.* New York: John Wiley & Sons, INC.

Eisenberger, I. (1964). Genesis of bimodal distributions. *Technometrics* , 357-363.

Erlang, A. K. (1909). The Theory of Probabilities and Telephone Conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, 33-39.

Erol, H. (1995). *Sonlu karma dağılım modelleri (sürekli tip-tek değişkenli.* Adana: Çukurova Üniversitesi, Fen Bil. Ens. Doktora tezi.

Erol, H., & Akdeniz, F. (1995). A statistical approach for ground cover modeling according to the spectral brightness. *International Journal of Remote Sensing*, 1599-1616.

Erol, H., & Akdeniz, F. (1997). Modeling selected proteins in human blood for normal and disease states: a quantitative approach. *TOME LVII, Contributed Papers, Book 1* (s. 253-254). İstanbul: Bulletin of the International Statistical Institute.

Erol, H., Akdeniz, F., & Çabuk, A. (1997). Toptan eşya fiyatları ve tüketici fiyatları indekslerindeki değişim oranlarının modellenmesinde karma dağılımların kullanılması. *Araştırma Sempozyumu '97 Bildirileri*, (s. 116-119). Ankara.

Everitt, B. (1987). *Introduction to optimization methods and their application in statistics.* London: Chapman and Hall.

Everitt, B., & Dunn, G. (2001). *Applied Multivariate Data Analysis.* London: Arnold.

Fowlkes, E. (1979). Some methods for studying the mixture of two normal (lognormal) distributions. *Journal of Classification*, 297-306.

Fraley, C., & Raftery, A. E. (1998). How many clusters? Which clustering method?-Answers via model-based cluster analysis. *Computer Journal, 41*, 578-588.

G.E., S. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 461-464.

Gökgöz, F. (2012). *Kuyruk Teorisi.* Ankara: Açık Ders.

Gregor, J. (1969). An algorithm for the decomposition of a distribution into Gaussian components. *Biometrics*, 79-93.

Gül, E. (2016). *Olasılık Teorisi ve Rasgele Değişkenler.* Ankara: Seçkin.

Gürsakal, N. (2013). *Çıkarımsal İstatistik.* Bursa: Dora.

Halaç, Ö. (1991). *Kantitatif Karar Verme Teknikleri (Yöneylem Araştırması).* İstanbul: Evrim Dağıtım.

Hillier, F., & Lieberman, G. (2001). *Introduction to Operations Research.* Stanford: McGraw Hill.

Hogg, R. V. (2013). *Introduction to Mathematical Statistics.* Londra: Pearson Education.

İnternet Kaynağı. (2018, Şubat 26). *C++ Libraries.* Boost: http://www.boost.org/doc/libs/1_53_0/libs/math/doc/sf_and_dist/html/math_toolkit/dist/dist_ref/dists/normal_dist.html adresinden alındı

Johannsen. (1907). *Waiting Times and Number of Calls.* London: Post Office Electrical Engineers Journal.

John, S. (1970). On identifying the population of origin of each observation in a mixture of observations from two gamma populations. *Technometrics*, 565-568.

Joiner, B. L. (1975). Living Histograms. *International Statistical Review,3*, 339-340.

Kalaycı, Ş. (2006). *SPSS Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistik Teknikleri.* Ankara: Asil Yayın Dağıtım Ltd. Şti.

Karagöz, Y. (2010). Nonparametrik Tekniklerin Güç ve Etkinlikleri. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi* , 18-40.

Kartal, M. (1998). *Hipotez Testleri.* Erzurum: Şafak Yayınevi.

Kass, R., & Raftery, A. (1995). Bayes Factors. *Journal of the American Statistical Association, Vol. 90, No. 430*, 773-795.

Kendall, D. G. (1952). Some problems in the theory of queues. *Journal of the Royal Statistical Society*, 151–185.

Kendall, D. G. (1953). Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain. *The Annals of Mathematical Statistics*, 338.

Kessler, D., & McDowell, A. (2012). *Introducing the FMM Procedure for Finite Mixture Models.* Cary, North Carolina: SAS Institute Inc.

Kingman, J. F. (1961). The single server queue in heavy traffic. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 902.

Kingman, J. F. (2009). The first Erlang century—and the next. *Queueing Systems*, 3-4.

Koehler, A., & Murphee, E. (1988). A comparion of the Akaike and Schwarz criteria for selecting model order. *Applied Statistics*, 187-195.

Köksal, M. (1980). Stokastik Kuyruk Modellerinin Analitik Yoldan İncelenmesi. *İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Dergisi*, 157-179.

Kraemer, W., & Langenbach-Belz, M. (1976). *Approximate Formulae for the Delay in the Queueing System G/G/1*. Melbourne: Congressbook, Eighth Int. Teletraffic Cong.

Lakshmi, R. V., & Vaidyanathan, V. S. (2016). Parameter Estimation in Gamma Mixture Model using Nomal-based Approximation. *Journal of Statistical Theory and Applications, Vol. 15*, 25-35.

Law, A., & Kelton, W. (2000). *Simulation Modeling and Analysis.* ABD: McGraw-Hill.

L'Ecuyer. (1988). Efficient and portable combined random number generators. *Communications of the ACM*, 742-751.

L'Ecuyer, P. (1990). Random numbers for simulation. *Communications of the ACM* , 85-97.

L'Ecuyer, P. (1994). Uniform random number generation. *Annals of Operations Research-Paperbound Edition*, 77-120.

Lee, W., Wu, J., & Hou, W. (2004). A note on inventory model involving variable lead time with defective units for mixtures of distribution. *Int. J. Prod. Econ.*, 31-44.

Leisch, F. (2004). FlexMix: A General Framework for Finite Mixture Models and Latent Class Regression in R. *Journal of Statistical Software*, 10-18.

Li, H. (2016). *Parameter Estimation of Queueing System using Mixture Model and the EM Algorithm.* Victoria: University of Victoria.

Lin, H. (2013). Reducing lost-sales rate on the stochastic inventory model with defective goods for the mixtures of distributions. *Applied Mathematical Modelling*, 3296–3306.

Little, J. D. (1961). A Proof of the Queueing Formula. *Operations Research*, 383-387.

Ma, D. (2018, Mart 1). *A catalog of parametric severity models*. Topics in Actuarial Modeling:

https://actuarialmodelingtopics.wordpress.com/tag/hyperexponential-distribution/ adresinden alındı

MacQueen, J. (1967). Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations. *In Proceedings of the 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* , 281-297.

Masoom, M., Umbach, D., & Saleh, A. (1992). Estimating Life Functions of Chi Distribution Using Selected Order Statistics. *IIE Transactions*, 88-98.

McLachlan, G., & Basford, K. (1988). *Mixture Models: Inference and Applications to Clustering.* New York: Marcel Dekker.

McLachnan, G., & Peel, D. (2000). *Finite Mixture Models.* Canada: John Wiley Sons, INC.

Mendenhall, W., & Sincich, T. (2007). *Statistics for Engineering and the Sciences.* New Jersey: Pearson.

Montgomery, D. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control.* Danvers: John Wiley & Sons, Inc.

Mosler, K., & Seidel, W. (2001). *Testing for homogeneity in an exponential mixture model.* 231-247: Australian and New Zealand Journal of Statistics,43.

Nikulin, M. (1973). Chi-squared test for normality. *Proceedings of the International Vilnius Conference on Probabılıty Theory and Mathematical Statistics*, 119-122.

Ouyang, L., & Wu, K. S. (1998). A minimax distribution free procedure for mixed inventory model with variable lead time. *Int. J. Prod. Econ.*, 511–516.

Özdemir, S. (2015). *Veri Madenciliği Ders Notları.* Ankara: Gazi Üniversitesi.

Öztürk, L. (2004). Monte-Carlo Simülasyon Metodu ve Bir İşletme Uygulaması. *Doğu Anadolu Bölgesi Araştırmaları*, 116-122.

Pallant, J. (2005). *SPSS Survival Manual, Using Graphs to Describe and Explore the Data.* Sydney: Allen & Unwin.

Panico, J. A. (1969). *Queueing Theory.* Englewood Cliff: Prentice-Hall Inc.

Papadopolous, H., Heavey, C., & Browne, J. (1993). Queueing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design. *Springer*, 35.

Pavlic, M., Brand, R. J., & Cummings, S. R. (2001). *Estimating probability of non-response to treatment using mixture distributions.* 1739-1753: Statistics in Medicine, 20.

Pearson, K. (1905). Das Fehlergesetz und seine Verallgemeinerungen durch Fechner und Pearson. A Rejoinder. *Biometrika*, 169-212.

Pearson, K. (1906). Walter Frank Raphael Galton. *Biometrica*, 1-25.

Pedgen, C., Shannon, R., & Sadowski, R. (1995). *Introduction to simulation using SIMAN.* Singapur: McGraw-Hill.

Peters, B. C., & Coberly, W. A. (1976). The numerical evaluation of the maximum likelihood estimate of mixture proportions. *Commun. Stats.*, 1127-1135.

Pollaczek, F. (1930). *Ueber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie.* Math. Z. .

Pollard, H. S. (1934). On the relative stability of median and the arithmetic mean with particular reference to certain frequency distributions which can be dissected into normal distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 227-262.

Raftery, A., & Dean, N. (2006). Variable Selection for Model-based Clustering. *Journal of the American Statistical Association*, 168–178.

Rao, C. R. (1948). The utilization of multiple measurements in problems of biological classification. *J.R. Statist. Soc.*, 159-203.

Redner, R. A., & Walker, H. A. (1984). Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 195-239.

Roeder, K., & Wasserman, L. (1997). Practical density estimation using mixtures of normals. *Journal of the American Statistical Association*, 894-902.

Rundel, C. (2012). *Statistics104 Maximum Likelihood.* Durham, North Carolina: Duke University.

Saaty Thomas, L. (1960). *Elements Of Queueing Thory With Applications* . New York: Mcgraw-Hill Book Company, Inc.

Sarıaslan, H. (1986). *Sıra Bekleme Sistemlerinde Simülasyon (Benzetim) Tekniği.* Ankara: A.Ü.S.B.F. Yayınları.

Savanur, S. J., Chadha, V. K., & Jagannatha, P. S. (2002). *Mixture model for analysis of tuberculin surveys.* 147: Ind. J. Tub.,49.

Schlechter, K. (2009). *Hershey Medical Center to open redesigned emergency room.* Hershey : The Patriot-News.

Schork, N., Nath, S., Lindpaintner, K., & Jacob, J. (1996). Extensions of quantitative trait locus mapping in experimental organisms. *Hypertension*, 1104-1111.

Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 461-464.

Servi, T. (2009). *Çok değişkenli karma dağılım modeline dayalı kümeleme analizi.* Adana: Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü .

Sezen, H., & Günal, M. (2009). *Yöneylem Araştırmasında Benzetim.* Ekin Basın Yayım Dağıtım: Bursa.

Shaughnessy, J. M., & Pfannkuch, M. (2002). How faithful is old faithful? *The National Council of Teachers of Mathematics* , 252-259.

Sommereder, M. (2011). *Modelling of Queueing Systems with Markov Chains: An Introduction to Basic and Advanced Modelling Techniques.* Norderstedt: Book on Demand.

Spiegel, M., & Stephens, L. (2008). *Theory and Problems of Statistics in SI Units.* New York: McGraw-Hill.

Sundarapandian, V. (2009). *Probability, Statistics and Queuing Theory.* Kerala: PHI Learning Pvt. Ltd.

Sundarapandian, V. (Probability, Statistics and Queueing Theory). *7. Queueing Theory.* Kerala: PHI Learning.

Şencan, H. (2005). *Güvenilirlik ve Geçerlilik.* Ankara.

Şimşek, H. (2004). *Kuyruk Teorisinin İstanbul Boğazı Tanker ve Gemi Geçişleriyle Haydarpaşa Limanı Konteyner Terminaline Uygulanması.* İstanbul: İstanbul Teknik Üniversitesi.

Tan, W., & Chang, W. C. (1972). Some comparisons of the method of moments and the method of maximum likelihood in estimating parameters of a mixture of two normal densities. *JASA,67,* 702-708.

Tierauf, R., & Klekamp, R. (1975). *Decision Making Through Operations Research.* New York: John Wiley.

Tijms, H. (2003). Chapter 9 in A First Course in Stochastic Models. H. Tijms içinde, *Algorithmic Analysis of Queues.* Chichester: Wiley.

Titterington, D. M., Smith, A. F., & Makov. (1985). *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions.* New York: Wiley.

Watson, K., Blackstone, J., & Gardiner, S. (2007). The evolution of a management philosophy: The theory of constraints. *Journal of Operations Management*, 387-402.

Wengrzik. (2012). *Parameter Estimation for Mixture Models Given Grouped Data.* Bremen: Universität Bremen.

Wengrzik, J. (2012). *Parameter Estimation for Mixture Models Given Grouped Data.* Bremen: Universtat Bremen.

Wu, J.-W., & Tsai, H.-Y. (2001). Mixture Inventory model with back orders and lost sales for variable lead time demand with the mixtures of normal distributions. *International Journal of System Science,vol.32,2*, 259-268.

Yağcı, B. (2017, Ekim 2). *Rasgele Değişkenler*. http://insaat.balikesir.edu.tr/dokumanlar/istatistik/ist3.pdf: http://insaat.balikesir.edu.tr/dokumanlar/istatistik/ist3.pdf adresinden alındı

Yalta, T. (2011). *Modellemeye İlişkin Konular-Model Seçim Ölçütleri.* Türkiye Bilimleri Akademisi: Ulusal Açık Ders Malzemeleri Konsorsiyumu.

Yavuz, S. (2008). *Simülasyonda İstatistiksel Modeller.* İstanbul: Yıldız Teknik Üniversitesi.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta öğretimini İstanbul'da, lise eğitimini Hatay'da tamamladı. 2009 yılında girdiği Mersin Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü'nden 2014 yılında mezun oldu. Aynı yıl Toros Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2015 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Endüstri Mühendisliği bölümünde yüksek lisans öğrenimine başlamıştır. Halen Toros Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü'nde çalışmaya devam etmektedir.

EKLER

EK1:

N(6, 2) + N(9, 2) karma dağılımı için oluşturulan ampirik dağılımlar

N(6,2)%10+N(9,2)%90

CONT(0.0005,0.5598286,0.0011,1.209539,0.0017,1.534394,0.0022,1.85925,0.0033,2.184105,0.0052,2.50896,0.0076,2.833815,0.0103,3.158671,0.0145,3.483526,0.0202,3.808381,0.0281,4.133236,0.0347,4.458092,0.046,4.782947,0.058,5.107802,0.0746,5.432657,0.096,5.757513,0.1213,6.082368,0.1502,6.407223,0.1858,6.732078,0.224,7.056934,0.2693,7.381789,0.3164,7.706644,0.3707,8.031499,0.4306,8.356355,0.4851,8.68121,0.5387,9.006065,0.6018,9.33092,0.6581,9.655775,0.713,9.980631,0.7631,10.30549,0.8072,10.63034,0.846,10.9552,0.8844,11.28005,0.9141,11.60491,0.9362,11.92976,0.9534,12.25462,0.9656,12.57947,0.9744,12.90433,0.9833,13.22918,0.9883,13.55404,0.9928,13.87889,0.9954,14.20375,0.9972,14.5286,0.9985,14.85346,0.999,15.17831,0.9995,15.50317,0.9999,15.82803,1,16.47774)

N(6,2)%20+N(9,2)%80

CONT(0.0001,0.097389,0.0007,0.5794233,0.0011,0.9178294,0.0024,1.256236,0.0034,1.594642,0.0051,1.933048,0.007,2.271454,0.0104,2.60986,0.0146,2.948266,0.0206,3.286672,0.0291,3.625078,0.0376,3.963485,0.0497,4.30189,0.0639,4.640297,0.0815,4.978703,0.1028,5.317109,0.1278,5.655515,0.1574,5.993921,0.1905,6.332327,0.23,6.670734,0.2724,7.00914,0.3206,7.347546,0.3704,7.685952,0.4241,8.024358,0.4843,8.362764,0.5372,8.70117,0.5924,9.039576,0.6489,9.377982,0.7037,9.716389,0.7543,10.05479,0.8009,10.3932,0.8416,10.73161,0.8777,11.07001,0.9098,11.40842,0.9337,11.74683,0.9518,12.08523,0.9648,12.42364,0.9743,12.76204,0.9826,13.10045,0.9889,13.43886,0.9929,13.77726,0.9955,14.11567,0.9974,14.45407,0.9988,14.79248,0.9991,15.13089,0.9995,15.46929,0.9999,15.8077,1,16.48451)

N(6,2)%30+N(9,2)%70

CONT(0.0001,0.097389,0.0002,0.2410172,0.0008,0.5794233,0.0013,0.9178294,0.0027,1.256236,0.0042,1.594642,0.0065,1.933048,0.0093,2.271454,0.0137,2.60986,0.0203,2.948266,0.029,3.286672,0.0403,3.625078,0.0521,3.963485,0.0687,4.301891,0.0871,4.640297,0.1099,4.978703,0.1384,5.317109,0.1673,5.655515,0.1988,5.993921,0.2376,6.332327,0.2801,6.670734,0.3251,7.00914,0.3741,7.347546,0.424,7.685952,0.476,8.024358,0.533,8.362764,0.5838,8.70117,0.6363,9.039576,0.6871,9.377982,0.7363,9.716389,0.7821,10.05479,0.8238,10.3932,0.8601,10.73161,0.893,11.07001,0.9216,11.40842,0.9426,11.74683,0.9584,12.08523,0.9702,12.42364,0.9782,12.76204,0.9856,13.10045,0.9906,13.43886,0.9939,13.77726,0.9962,14.11567,0.9979,14.45407,0.9992,14.79248,0.9994,15.13089,0.9997,15.46929,0.9999,15.8077,1,16.48451)

N(6,2)%40+N(9,2)%60

CONT(0.0001,0.927585,0.0002,0.1389855,0.0007,0.4945091,0.0018,0.8500326,0.0035,1.205556,0.0057,1.561080,0.0087,1.916603,0.0123,2.272127,0.0188,2.627651,0.0401,3.338698,0.0554,3.694221,0.0712,4.049745,0.0939,4.405268,0.1215,4.760792,0.1498,5.116316,0.1853,5.471839,0.2239,5.827363,0.2645,6.182886,0.3098,6.538410,0.3606,6.893933,0.4106,7.249457,0.4649,7.604981,0.5179,7.960504,0.5772,8.316028,0.6279,8.671551,0.6777,9.027075,0.7264,9.382598,0.7705,9.738122,0.8113,10.09365,0.8503,10.44917,0.884,10.80469,0.9132,11.16022,0.9389,11.51574,0.9558,11.87126,0.9691,12.22679,0.9781,12.58231,0.9846,12.93783,0.9908,13.29336,0.9939,13.64888,0.9963,14.0044,0.9976,14.35993,0.9991,14.71545,0.9996,15.07098,0.9998,15.4265,0.9999,15.78202,1,16.49307)

N(6,2)%50+N(9,2)%50

CONT(0.0001,0.933566,0.0002,0.246444,0.0005,0.4406781,0.0018,0.7842392,0.0036,1.1278,0.0059,1.471361,0.0097,1.814923,0.014,2.158484,0.0201,2.502045,0.0295,2.845606,0.0425,3.189167,0.0591,3.532728,0.0772,3.876289,0.1002,4.21985,0.1275,4.563412,0.1588,4.906973,0.1964,5.250534,0.2344,5.594095,0.276,5.937656,0.325,6.281217,0.3728,6.624778,0.4222,6.968339,0.4735,7.311901,0.5268,7.655462,0.5764,7.999023,0.6309,8.342584,0.6784,8.686145,0.7222,9.029706,0.7645,9.373267,0.8029,9.716828,0.8382,10.06039,0.8702,10.40395,0.8985,10.74751,0.9231,11.09107,0.9437,11.43463,0.9597,11.7782,0.9724,12.12176,0.9797,12.46532,0.985,12.80888,0.9896,13.15244,0.9929,13.496,0.9957,13.83956,0.9975,14.18312,0.9987,14.52668,0.9997,14.87025,0.9999,15.21381,1,15.90093)

N(6,2)%60+N(9,2)%40

CONT(0.0006,0.0971169,0.0009,0.4406781,0.0025,0.7842392,0.0048,1.1278,0.0074,1.471361,0.0117,1.814923,0.0172,2.158484,0.0248,2.502045,0.0369,2.845606,0.051,3.189167,0.0696,3.532728,0.0915,3.876289,0.1188,4.21985,0.15,4.563412,0.1856,4.906973,0.2298,5.250534,0.2719,5.594095,0.3179,5.937656,0.37,6.281217,0.4208,6.624778,0.4719,6.968339,0.5271,7.311901,0.5802,7.655462,0.6292,7.999023,0.682,8.342584,0.7256,8.686145,0.7636,9.029706,0.8015,9.373267,0.8356,9.716828,0.8675,10.06039,0.8951,10.40395,0.9179,10.74751,0.9382,11.09107,0.9545,11.43463,0.9676,11.7782,0.9777,12.12176,0.9836,12.46532,0.9879,12.80888,0.9915,13.15244,0.9943,13.496,0.9964,13.83956,0.9979,14.18312,0.9988,14.52668,0.9997,14.87025,0.9999,15.21381,1,15.90093)

N(6,2)%70+N(9,2)%30

CONT(0.0007,0.0549836,0.001,0.3865066,0.0027,0.7180296,0.0042,1.049553,0.0071,1.381076,0.0116,1.712599,0.0171,2.044122,0.0255,2.375645,0.0367,2.707168,0.0515,3.038691,0.0697,3.370214,0.0945,3.701737,0.1207,4.03326,0.1534,4.364783,0.1885,4.696306,0.2298,5.027829,0.2767,5.359352,0.3224,5.690875,0.3716,6.0

22398,0.4276,6.353921,0.4851,6.685444,0.5348,7.016967,0.5883,7.34849,0.6392,7.680013,0.686,8.011536,0.7344,8.343059,0.7728,8.674582,0.8057,9.006105,0.8383,9.337628,0.8658,9.669151,0.8915,10.00067,0.914,10.3322,0.9328,10.66372,0.9474,10.99524,0.9615,11.32677,0.9723,11.65829,0.9803,11.98981,0.9863,12.32134,0.9896,12.65286,0.9924,12.98438,0.9951,13.3159,0.9964,13.64743,0.9981,13.97895,0.9987,14.31047,0.9994,14.642,0.9999,14.97352,1,15.30504)

N(6,2)%80+N(9,2)%20

CONT(0.0002,0.941366,0.0003,0.613403,0.0005,0.28544,0.0007,0.0425231,0.0011,0.3704859,0.0029,0.6984488,0.0047,1.026412,0.0078,1.354375,0.0123,1.682337,0.0185,2.0103,0.0269,2.338263,0.039,2.666266,0.0562,2.994189,0.0757,3.322152,0.1019,3.650115,0.13,3.978078,0.1658,4.30604,0.2055,4.634003,0.2494,4.961966,0.3029,5.289929,0.3532,5.617892,0.402,5.945855,0.4622,6.273818,0.5178,6.601781,0.574,6.929743,0.6282,7.257706,0.6771,7.585669,0.7231,7.913632,0.7693,8.241595,0.8083,8.569558,0.8406,8.897521,0.868,9.225484,0.8921,9.553447,0.9128,9.881409,0.9315,10.20937,0.9487,10.53734,0.9598,10.8653,0.9706,11.19326,0.9785,11.52122,0.9841,11.84919,0.9889,12.17715,0.9918,12.50511,0.994,12.83308,0.9956,13.16104,0.9969,13.489,0.998,13.81696,0.9989,14.14493,0.9996,14.47289,0.9999,14.80085,1,15.12882)

N(6,2)%90+N(9,2)%10

CONT(0.0002,0.941366,0.0003,0.613403,0.0005,0.28544,0.0007,0.425231,0.0012,0.3704859,0.0031,0.6984488,0.0052,1.026412,0.009,1.354375,0.0138,1.682337,0.0205,2.0103,0.0297,2.338263,0.0437,2.666226,0.0626,2.994189,0.0847,3.322152,0.1134,3.650115,0.144,3.978078,0.1838,4.30604,0.2273,4.634003,0.2762,4.961966,0.3345,5.289929,0.3891,5.617892,0.4436,5.945855,0.5076,6.273818,0.566,6.601781,0.6248,6.929743,0.6804,7.257706,0.7291,7.585669,0.7743,7.913632,0.8188,8.241595,0.8553,8.569558,0.885,8.897521,0.9076,9.225484,0.9274,9.553447,0.9421,9.881409,0.9558,10.20937,0.9677,10.53734,0.9759,10.8653,0.983,11.19326,0.987

9,11.52122,0.991,11.84919,0.9939,12.17715,0.9959,12.50511,0.9974,12.83308,0.9979,13.16104,0.9983,13.489,0.9987,13.81696,0.9993,14.14493,0.9996,14.47289,0.9999,14.80085,1,15.12882)

EK2:

N(6, 2) + N(10, 2) karma dağılımı için oluşturulan ampirik dağılımlar

N(6,2)%10+N(10,2)%90

CONT(0.0005,0.5700327,0.0013,1.26056,0.0017,1.605823,0.0023,1.951086,0.0037,2.296350,0.0056,2.641613,0.0084,2.986877,0.013,3.33214,0.016,3.677403,0.0202,4.022667,0.0249,4.36793,0.0321,4.713194,0.0402,5.058457,0.0502,5.40372,0.0623,5.748984,0.0754,6.094247,0.0933,6.439511,0.1169,6.784774,0.1431,7.130037,0.1752,7.475301,0.2098,7.820564,0.2527,8.165828,0.2987,8.511091,0.3493,8.856355,0.4103,9.201618,0.4684,9.546881,0.5241,9.892145,0.5878,10.23741,0.6474,10.58267,0.7054,10.92793,0.7597,11.2732,0.8068,11.61846,0.8477,11.96373,0.8883,12.30899,0.9181,12.65425,0.9406,12.99952,0.9563,13.34478,0.9689,13.69004,0.9788,14.0353,0.986,14.38057,0.9914,14.72583,0.9947,15.0711,0.9966,15.41636,0.9985,15.76162,0.9989,16.10689,0.9995,16.45215,0.9999,16.79741,1,17.48794)

N(6,2)%20+N(10,2)%80

CONT(0.0009,0.6304437,0.0014,0.989258,0.0027,1.348072,0.0037,1.706887,0.0053,2.065701,0.0083,2.424515,0.0122,2.783329,0.0172,3.142144,0.0237,3.5,0.0316,3.859772,0.0411,4.218587,0.0522,4.577401,0.0659,4.936215,0.0828,5.295029,0.1009,5.653844,0.1204,6.012658,0.1439,6.371472,0.1713,6.730287,0.2045,7.089101,0.2396,7.447915,0.2776,7.806729,0.322,8.165544,0.3683,8.524358,0.4181,8.883172,0.4803,9.241987,0.5334,9.600801,0.5845,9.959615,0.6467,10.31843,0.7003,10.67724,0.7547,11.03606,0.8036,11.39487,0.8454,11.75369,0.8833,12.1125,0.9154,12.47132,0.9393,12.83013,0.9565,13.18894,0.9682,13.54776,0.978,13.90657,0.9863,14.26539,0.9912,14.6242,0.9949,14.98302,0.9966,15.34183,0.9983,15.70064,0.9991,16.05946,0.9994,16.41827,0.9998,16.77709,0.9999,17.1359,1,17.49472)

N(6,2)%30+N(10,2)%70

CONT(0.0002,0.2716294,0.001,0.6304437,0.0017,0.989258,0.0032,1.348072,0.0047,1.706887,0.0068,2.065701,0.011,2.424515,0.0162,2.783329,0.0243,3.142144,0.0339,3.5,0.0452,3.859772,0.0591,4.218587,0.0756,4.577401,0.0953,4.936215,0.1198,5.295029,0.1432,5.653844,0.1675,6.012658,0.198,6.371472,0.2299,6.730287,0.266,7.089101,0.3048,7.447915,0.3451,7.806729,0.3893,8.165544,0.4351,8.524358,0.4832,8.883172,0.5387,9.241987,0.5866,9.600801,0.6329,9.959615,0.6883,10.31843,0.7367,10.67724,0.7843,11.03606,0.8276,11.39487,0.8645,11.75369,0.8985,12.1125,0.927,12.47132,0.9474,12.83013,0.9628,13.18894,0.9729,13.54776,0.9815,13.90657,0.9887,14.26539,0.9925,14.6242,0.9957,14.98302,0.9971,15.34183,0.9987,15.70064,0.9994,16.05946,0.9996,16.41827,0.9998,16.77709,0.9999,17.1359,1,17.49472)

N(6,2)%40+N(10,2)%60

CONT(0.0004,0.2104141,0.0011,0.5863458,0.0022,0.9622775,0.0043,1.338209,0.0066,1.714141,0.0095,2.090073,0.0151,2.466004,0.0233,2.841936,0.0349,3.217868,0.0488,3.5938,0.0644,3.969731,0.0855,4.345663,0.1109,4.721595,0.1374,5.097527,0.1689,5.473458,0.202,5.84939,0.2352,6.225322,0.2729,6.601254,0.3158,6.977185,0.3603,7.353117,0.4042,7.729049,0.448,8.104981,0.4947,8.480912,0.5428,8.856844,0.5959,9.232776,0.642,9.608707,0.6863,9.984639,0.7354,10.36057,0.7792,10.7365,0.8198,11.11243,0.8594,11.48837,0.8925,11.8643,0.9221,12.24023,0.9451,12.61616,0.9603,12.99209,0.9726,13.36802,0.9811,13.74396,0.9879,14.11989,0.9922,14.49582,0.9954,14.87175,0.9971,15.24768,0.9987,15.62362,0.9996,15.99955,0.9998,16.37548,0.9999,16.75141,1,17.50327)

N(6,2)%50+N(10,2)%50

CONT(0.0002,0.1685455,0.0009,0.5325148,0.002,0.89644841,0.004,1.260453,0.0073,1.624423,0.0119,1.988392,0.0171,2.352361,0.0255,2.71633,0.0383,3.0803,0.0544,3.444269,0.0726,3.808238,0.0936,4.172208,0.1198,4.536177,0.1494,4.900146,0.1865,5.264115,0.2232,5.628085,0.2596,5.992054,0.3026,6.356023,0.3448,6.719

993,0.3894,7.083962,0.435,7.447931,0.4808,7.8119,0.5252,8.17587,0.5702,8.5398
39,0.6125,8.903808,0.659,9.267778,0.6988,9.631747,0.7356,9.995716,0.7778,10.3
5969,0.8146,10.72365,0.8483,11.08762,0.8796,11.45159,0.9082,11.81556,0.9318,
12.17953,0.9511,12.5435,0.9651,12.90747,0.9761,13.27144,0.9827,13.63541,0.98
77,13.99938,0.9919,14.36335,0.9951,14.72732,0.997,15.09129,0.9986,15.45526,0.
9997,15.81922,0.9999,16.18319,1,16.91113)

N(6,2)%60+N(10,2)%40
CONT(0.0006,0.1685455,0.0014,0.5325148,0.0028,0.8964841,0.0055,1.260453,0.
0089,1.624423,0.0144,1.988392,0.0212,2.352361,0.0318,2.71633,0.0464,3.0803,0.
0646,3.444269,0.0857,3.808238,0.1117,4.172208,0.1429,4.536177,0.1785,4.90014
6,0.2235,5.264115,0.2638,5.628085,0.306,5.992054,0.3549,6.356023,0.4022,6.719
993,0.4507,7.083962,0.499,7.447931,0.5457,7.8119,0.5916,8.17587,0.6368,8.5398
39,0.6766,8.903808,0.717,9.267778,0.7527,9.631747,0.7835,9.995716,0.8193,10.3
5969,0.8501,10.72365,0.8783,11.08762,0.9047,11.45159,0.9272,11.81556,0.9459,
12.17953,0.9608,12.5435,0.9718,12.90747,0.9809,13.27144,0.9862,13.63541,0.99,
13.99938,0.9934,14.36335,0.996,14.72732,0.9972,15.09129,0.9987,15.45526,0.99
97,15.81922,0.9999,16.18319,1,16.91113)

N(6,2)%70+N(10,2)%30
CONT(0.0007,0.1264121,0.0015,0.4783433,0.003,0.8302745,0.0056,1.182206,0.0
093,1.534137,0.0149,1.886068,0.0216,2.237999,0.0315,2.58993,0.0469,2.941862,
0.0651,3.293793,0.0893,3.645724,0.1158,3.997655,0.1494,4.349586,0.1856,4.701
518,0.2279,5.053449,0.2751,5.40538,0.3219,5.757311,0.3695,6.109242,0.4236,6.4
61173,0.4749,6.813105,0.5256,7.165036,0.5763,7.516967,0.621,7.868898,0.6657,
8.220829,0.7067,8.572761,0.7426,8.924692,0.778,9.276623,0.8062,9.628554,0.83
18,9.980485,0.8595,10.33242,0.8832,10.68435,0.905,11.03628,0.9245,11.38821,0.
9413,11.74014,0.9553,12.09207,0.9675,12.444,0.9768,12.79593,0.9845,13.14787,

0.9884,13.4998,0.9913,13.85173,0.9941,14.20366,0.9957,14.55559,0.9976,14.907
52,0.9986,15.25945,0.9993,15.61138,0.9998,15.96332,1,16.31525)

N(6,2)%80+N(10,2)%20
CONT(0.0014,0.4623227,0.0031,0.8106937,0.0063,1.159065,0.0096,1.507436,0.0
16,1.855807,0.0231,2.204178,0.0335,2.552549,0.0513,2.90092,0.0703,3.249291,0.
0953,3.597662,0.1256,3.946033,0.1622,4.294404,0.2036,4.642775,0.2494,4.99114
6,0.3059,5.339517,0.3559,5.68788,0.4088,6.036259,0.4663,6.38463,0.5236,6.7330
01,0.5779,7.081372,0.6297,7.429743,0.6788,7.778115,0.7221,8.126486,0.7622,8.4
74857,0.7975,8.823228,0.8269,9.171599,0.8517,9.51997,0.8734,9.868341,0.8944,
10.21671,0.9138,10.56508,0.9309,10.91345,0.9452,11.26182,0.958,11.6102,0.967
2,11.95857,0.976,12.30694,0.9824,12.65531,0.9874,13.00368,0.9909,13.35205,0.9
937,13.70042,0.9954,14.04879,0.9967,14.39716,0.9979,14.74554,0.9988,15.09391
,0.9995,15.44228,0.9999,15.79065,1,16.13902)

N(6,2)%90+N(10,2)%10
CONT(0.0007,0.1139516,0.0015,0.4623227,0.0034,0.8106937,0.0073,1.159065,0.
011,1.507436,0.0177,1.855807,0.0256,2.204178,0.0377,2.552549,0.0571,2.90092,
0.0785,3.249291,0.1068,3.597662,0.1401,3.946033,0.1811,4.294404,0.227,4.6427
75,0.2784,4.991146,0.3405,5.339517,0.3963,5.687888,0.4548,6.036259,0.5184,6.3
8463,0.5808,6.733001,0.6384,7.081372,0.6932,7.429743,0.7439,7.778115,0.7883,
8.126486,0.8281,8.474857,0.8612,8.823228,0.8868,9.171599,0.906,9.51997,0.922
8,9.868341,0.9382,10.21671,0.9517,10.56508,0.9621,10.91345,0.9698,11.26182,0.
9778,11.6102,0.9829,11.95857,0.9874,12.30694,0.991,12.65531,0.9934,13.00368,
0.9955,13.35205,0.9973,13.70042,0.998,14.04879,0.9982,14.39716,0.9987,14.745
54,0.9992,15.09391,0.9996,15.44228,0.9999,15.79065,1,16.13902)

EK3:

N(5, 2) + N(10, 2) karma dağılımı için oluşturulan ampirik dağılımlar

N(5,2)%10+N(10,2)%90

CONT(0.0013,0.3115799,0.0018,0.6772515,0.0024,1.042923,0.0045,1.408595,0.0067,1.774266,0.0095,2.139938,0.0127,2.505609,0.0171,2.871281,0.0228,3.236953,0.0268,3.602624,0.0336,3.968296,0.041,4.333967,0.0495,4.699639,0.0586,5.065311,0.0694,5.430982,0.0839,5.796654,0.0973,6.162325,0.1164,6.527997,0.1397,6.893668,0.1679,7.25934,0.2007,7.625011,0.2384,7.990683,0.2848,8.356355,0.3346,8.722026,0.3919,9.087698,0.4544,9.453369,0.5166,9.819041,0.5805,10.18471,0.6435,10.55038,0.7046,10.91606,0.7614,11.28173,0.8111,11.6474,0.8557,12.01307,0.8943,12.37874,0.9244,12.74441,0.946,13.11008,0.9611,13.47576,0.9726,13.84143,0.9825,14.2071,0.9884,14.57277,0.9934,14.93844,0.9959,15.30411,0.9979,15.66979,0.9989,16.03546,0.9993,16.40113,0.9998,16.7668,0.9999,17.13247,1,17.4981)

N(5,2)%20+N(10,2)%80

CONT(0.0017,0.0606866,0.0028,0.439909,0.0042,0.8191315,0.0062,1.198354,0.0097,1.577576,0.014,1.956799,0.0208,2.336021,0.0289,2.715244,0.0368,3.094466,0.0466,3.473689,0.06,3.852911,0.074,4.232134,0.0897,4.611356,0.1059,4.990578,0.1237,5.369801,0.1431,5.749023,0.1653,6.128246,0.1899,6.507468,0.2168,6.886691,0.2479,7.265913,0.2832,7.645136,0.3215,8.024358,0.3647,8.40358,0.4136,8.782803,0.471,9.162025,0.5285,9.541248,0.5833,9.92047,0.6461,10.29969,0.7031,10.67892,0.7592,11.05814,0.8088,11.43736,0.8531,11.81658,0.8907,12.1958,0.9232,12.57503,0.9452,12.95425,0.9617,13.33347,0.9738,13.71269,0.9825,14.09192,0.9893,14.47114,0.9937,14.85036,0.996,15.22958,0.9978,15.60881,0.999,15.98803,0.9994,16.36725,0.9997,16.74647,0.9999,17.1257,1,17.50492)

N(5,2)%30+N(10,2)%70

CONT(0.002,0.0606866,0.0034,0.439909,0.0054,0.8191315,0.0081,1.198354,0.0129,1.577576,0.0198,1.956799,0.0295,2.336021,0.0411,2.715244,0.0528,3.094466,0.0684,3.473689,0.0881,3.852911,0.1099,4.232134,0.1325,4.611356,0.1533,4.990578,0.1797,5.369801,0.2049,5.749023,0.2325,6.128246,0.2618,6.507468,0.2922,6.886691,0.3256,7.265913,0.3625,7.645136,0.4004,8.024358,0.4399,8.40358,0.4844,8.782803,0.5348,9.162025,0.5851,9.541248,0.6342,9.92047,0.6894,10.29969,0.7398,10.67892,0.7891,11.05814,0.8326,11.43736,0.8715,11.81658,0.9055,12.1958,0.9339,12.57503,0.9524,12.95425,0.9675,13.33347,0.9777,13.71269,0.9855,14.09192,0.9908,14.47114,0.9946,14.85036,0.9966,15.22958,0.9983,15.60881,0.9994,15.98803,0.9996,16.36725,0.9998,16.74647,0.9999,17.1257,1,17.50492)

N(5,2)%40+N(10,2)%60

CONT(0.0028,0.0745224,0.0051,0.4708623,0.0083,0.8672022,0.0117,1.263542,0.0188,1.659882,0.0298,2.056222,0.0429,2.452562,0.0583,2.848902,0.0787,3.245242,0.1034,3.641582,0.1295,4.037921,0.1604,4.434261,0.191,4.830601,0.2222,5.226941,0.2561,5.623281,0.2925,6.019621,0.3267,6.415961,0.3625,6.812301,0.3989,7.208641,0.4367,7.604981,0.4733,8.00132,0.5132,8.39766,0.555,8.794,0.6013,9.19034,0.6481,9.58668,0.6936,9.98302,0.7419,10.37936,0.7881,10.7757,0.829,11.17204,0.8684,11.56838,0.9001,11.96472,0.9306,12.36106,0.951,12.7574,0.9671,13.51374,0.9766,13.55008,0.9847,13.94642,0.991,14.34276,0.9946,14.7391,0.9968,15.13544,0.9984,15.53178,0.9995,15.92812,0.9998,16.32446,0.9999,17.11714,1,17.51348)

N(5,2)%50+N(10,2)%50

CONT(0.0027,0.008729,0.0049,0.3931064,0.0093,0.7774839,0.014,1.161861,0.0204,1.546239,0.0323,1.930616,0.0483,2.314994,0.0676,2.699371,0.0875,3.083749,0.1131,3.468126,0.1441,3.852503,0.18,4.236881,0.2167,4.621258,0.2518,5.005636,0.2927,5.390013,0.3335,5.774391,0.3707,6.158768,0.4098,6.543146,0.4477,6.927523,0.4877,7.3119,0.5246,7.696278,0.5583,8.080655,0.5926,8.465033,0.6288,8.8

4941,0.67,9.233788,0.7088,9.618165,0.7454,10.00254,0.7855,10.38692,0.8239,10.7713,0.8565,11.15567,0.8889,11.54005,0.9153,11.92443,0.9393,12.30881,0.9569,12.69318,0.971,13.07756,0.9798,13.46194,0.9853,13.84632,0.9906,14.23069,0.9939,14.61507,0.9967,14.99945,0.998,15.38383,0.9997,15.7682,0.9999,16.15258,1,16.92134)

N(5,2)%60+N(10,2)%40

CONT(0.0036,0.008729,0.0064,0.3931064,0.011,0.7774839,0.0172,1.161861,0.0252,1.546239,0.0397,1.930616,0.0576,2.314994,0.0799,2.699371,0.1044,3.083947,0.1354,3.468126,0.1723,3.852503,0.2164,4.236881,0.2587,4.621258,0.301,5.005636,0.3492,5.390013,0.3952,5.774391,0.438,6.158768,0.4829,6.543146,0.5237,6.927523,0.5658,7.3119,0.6017,7.696278,0.6329,8.080655,0.6651,8.465033,0.698,8.84941,0.7335,9.233788,0.766,9.618165,0.7947,10.00254,0.8271,10.38692,0.8584,10.7713,0.8855,11.15567,0.9126,11.54005,0.9328,11.92443,0.9516,12.30881,0.9655,12.69318,0.9767,13.07756,0.9838,13.46194,0.9882,13.84632,0.9925,14.23069,0.9949,14.61507,0.9972,14.99945,0.9983,15.38383,0.9997,15.7682,0.9999,16.15258,1,16.92134)

N(5,2)%70+N(10,2)%30

CONT(0.0067,0.3148588,0.0112,0.6871981,0.0174,1.059537,0.0268,1.431877,0.0407,1.804216,0.0585,2.176555,0.0806,2.548895,0.1092,2.921234,0.1432,3.293574,0.1808,3.665913,0.2245,4.038252,0.273,4.410592,0.3222,4.782931,0.3719,5.15527,0.4254,5.52761,0.4762,5.899949,0.5246,6.272288,0.5687,6.644628,0.6116,7.016967,0.6512,7.389306,0.6858,7.761646,0.7154,8.133985,0.7421,8.506324,0.769,8.878664,0.7986,9.251003,0.8232,9.623342,0.8452,9.995682,0.8697,10.36802,0.892,10.74036,0.9122,11.1127,0.9312,11.48504,0.9468,11.85738,0.9603,12.22972,0.9728,12.60206,0.9803,12.9744,0.9867,13.34674,0.9904,13.71908,0.9935,14.09141,0.9954,14.46375,0.9973,14.83609,0.9985,15.20843,0.9993,15.58077,0.9998,15.95311,1,16.32545)

N(5,2)%80+N(10,2)%20

CONT(0.0073,0.2917178,0.0117,0.660497,0.0186,1.029276,0.0288,1.398055,0.0439,1.766835,0.064,2.135614,0.0874,2.504393,0.1187,2.873172,0.156,3.241951,0.1994,3.610731,0.2463,3.97951,0.3047,4.348289,0.3576,4.717068,0.4129,5.085847,0.4727,5.454627,0.5315,5.823406,0.583,6.192185,0.6347,6.560964,0.6781,6.929743,0.7216,7.298523,0.7573,7.667302,0.785,8.036081,0.8086,8.40486,0.8319,8.77364,0.8533,9.142419,0.8733,9.511198,0.8911,9.879977,0.907,10.24876,0.9233,10.61754,0.9381,10.98631,0.9518,11.35509,0.9624,11.72387,0.9721,12.09265,0.9797,12.46143,0.9852,12.83021,0.9899,13.19899,0.9926,13.56777,0.9949,13.93655,0.9965,14.30533,0.9975,14.67411,0.9987,15.04289,0.9993,15.41167,0.9999,15.78044,1,16.14922)

N(5,2)%90+N(10,2)%10

CONT(0.0084,0.2917178,0.0132,0.660497,0.0206,1.029276,0.032,1.398055,0.049,1.766835,0.0711,2.135614,0.0985,2.504393,0.1323,2.873172,0.1742,3.241951,0.2229,3.610731,0.2759,3.97951,0.3405,4.348289,0.3999,4.717068,0.4617,5.085847,0.5284,5.454627,0.5923,5.823406,0.6495,6.192185,0.7059,6.560964,0.7521,6.929743,0.7981,7.298523,0.8348,7.667302,0.862,8.036081,0.8824,8.40486,0.901,8.77364,0.9173,9.142419,0.9309,9.511198,0.9426,9.879977,0.9515,10.24876,0.9616,10.61754,0.9683,10.98631,0.9756,11.35509,0.9809,11.72387,0.9864,12.09265,0.9902,12.46143,0.9925,12.83021,0.995,13.19899,0.9967,13.56777,0.9977,13.93655,0.9981,14.30533,0.9985,14.67411,0.9991,15.04289,0.9994,15.41167,0.9999,15.78044,1,16.14922)

EK4:

N(6, 2) + N(12, 2) karma dağılımı için oluşturulan ampirik dağılımlar

N(6,2)%10+N(12,2)%90

CONT(0.0005,0.5904409,0.0006,0.9765026,0.0014,1.3626,0.0018,1.74868,0.0025,2.13476,0.0049,2.52084,0.0074,2.906919,0.011,3.292999,0.0155,3.679079,0.0203,4.065158,0.0244,4.451238,0.0306,4.837318,0.038,5.223398,0.045,5.609477,0.0522,5.995557,0.06,6.381637,0.0704,6.767717,0.08,7.153796,0.0912,7.539876,0.1028,7.925956,0.1173,8.312036,0.1372,8.698115,0.1625,9.084195,0.1926,9.470275,0.228,9.856355,0.2723,10.24243,0.3229,10.62851,0.3816,11.01459,0.4477,11.40067,0.5118,11.78675,0.5785,12.17283,0.6455,12.55891,0.7091,12.94499,0.7687,13.33107,0.8205,13.71715,0.8649,14.10323,0.9054,14.48931,0.9336,14.87539,0.9536,15.26147,0.9675,15.64755,0.9788,16.03363,0.9868,16.41971,0.9918,16.80579,0.9954,17.19187,0.9973,17.57795,0.9986,17.96403,0.9993,18.35011,0.9997,18.73619,0.9999,19.12227,1,19.50835)

N(6,2)%20+N(12,2)%80

CONT(0.0001,0.066777,0.0009,0.7324845,0.002,1.132115,0.0034,1.531746,0.0049,1.931376,0.0073,2.331007,0.0114,2.730638,0.0168,3.130268,0.0238,3.529899,0.0326,3.929529,0.0432,4.32916,0.0557,4.728791,0.0696,5.128421,0.0844,5.528052,0.1001,5.927682,0.1147,6.327313,0.1325,6.726944,0.1504,7.126574,0.1684,7.526205,0.1845,7.925836,0.2038,8.325466,0.2253,8.725097,0.253,9.124727,0.2813,9.524358,0.3183,9.923989,0.3621,10.32362,0.4104,10.72325,0.468,11.12288,0.5285,11.52251,0.585,11.92214,0.6503,12.32177,0.711,12.7214,0.7667,13.12103,0.8203,13.52066,0.8634,13.92029,0.9035,14.31993,0.9324,14.71956,0.9537,15.11919,0.9676,15.51882,0.9782,15.91845,0.9872,16.31808,0.9924,16.71771,0.9955,17.11734,0.9975,17.51697,0.9989,17.9166,0.9994,18.31623,0.9996,18.71586,1,19.51512)

N(6,2)%30+N(12,2)%70

CONT(0.0001,0.06677,0.0002,0.3328539,0.0011,0.7324845,0.0023,1.132115,0.00
42,1.531746,0.0063,1.931376,0.0099,2.331007,0.015,2.730638,0.0239,3.130268,0.
0342,3.529899,0.0474,3.929529,0.0633,4.32916,0.0818,4.728791,0.1027,5.128421
,0.1256,5.528052,0.1475,5.927682,0.1704,6.327313,0.1954,6.726944,0.2188,7.126
574,0.243,7.526205,0.2643,7.925836,0.2885,8.325466,0.3124,8.725097,0.3402,9.1
24727,0.3676,9.524358,0.4016,9.923989,0.4412,10.32362,0.484,10.72325,0.5339,
11.12288,0.5863,11.52251,0.6365,11.92214,0.6933,12.32177,0.7468,12.7214,0.79
55,13.12103,0.8425,13.52066,0.8808,13.92029,0.9167,14.31993,0.9415,14.71956,
0.9602,15.11919,0.9723,15.51882,0.9817,15.91845,0.9894,16.31808,0.9935,16.71
771,0.9962,17.11734,0.998,17.51697,0.9993,17.9166,0.9996,18.31623,0.9997,18.7
1586,0.9999,19.11549,1,19.51512)

N(6,2)%40+N(12,2)%60

CONT(0.0001,0.896973,0.0002,0.063477,0.0004,0.3532712,0.0016,0.7700193,0.0
035,1.186767,0.0057,1.603515,0.0092,2.020263,0.0148,2.437012,0.0237,2.85376,
0.0368,3.270508,0.0529,3.687256,0.07,4.104004,0.094,4.520752,0.1219,4.9375,0.
1533,5.354248,0.184,5.770996,0.215,6.18774,0.2477,6.604492,0.2813,7.02124,0.3
119,7.437988,0.3424,7.844736,0.3692,8.271484,0.3962,8.688232,0.4251,9.104981
,0.4526,9.521729,0.4833,9.938477,0.5213,10.35522,0.5613,10.77197,0.6073,11.18
872,0.6548,11.60547,0.7010,12.02222,0.7507,12.43896,0.7978,12.85571,0.8408,1
3.27246,0.8796,13.68921,0.9114,14.10596,0.9405,14.52271,0.9583,14.93945,0.97
22,15.3562,0.9813,15.77295,0.9886,16.1897,0.9933,16.60645,0.9963,17.02319,0.9
982,17.43994,0.9995,17.85669,0.9998,18.27344,0.9999,19.10693,1,19.52368)

N(6,2)%50+N(12,2)%50

CONT(0.0002,0.093383,0.0004,0.3114026,0.0016,0.7161883,0.0036,1.120974,0.0
066,1.525759,0.0114,1.930545,0.0169,2.335331,0.0263,2.740116,0.0408,3.144902
,0.0588,3.549688,0.0796,3.954473,0.1068,4.359259,0.1378,4.764044,0.1728,5.168
83,0.2105,5.573616,0.2472,5.978401,0.2877,6.383187,0.327,6.787972,0.3631,7.19

2758,0.3998,7.597544,0.4329,8.002329,0.4622,8.407115,0.4896,8.8119,0.5184,9.2
16686,0.5451,9.621472,0.5723,10.02626,0.6031,10.43104,0.6381,10.83583,0.6776
,11.24061,0.7171,11.6454,0.7547,12.05019,0.7938,12.45497,0.8332,12.85976,0.86
68,13.26454,0.899,13.66933,0.9255,14.07411,0.9478,14.4789,0.9641,14.88368,0.9
765,15.28847,0.9835,15.69326,0.9889,16.09804,0.9929,16.50283,0.9962,16.90761
,0.9978,17.3124,0.9993,17.71718,0.9998,18.12197,0.9999,18.52676,1,18.93154)

N(6,2)%60+N(12,2)%40
CONT(0.0006,0.093383,0.0008,0.3114026,0.0023,0.7161883,0.0048,1.120974,0.0
081,1.525759,0.0138,1.930545,0.0209,2.335331,0.0326,2.740116,0.0491,3.144902
,0.0696,3.549688,0.0951,3.954473,0.128,4.359259,0.1646,4.764044,0.208,5.16883
,0.2519,5.573616,0.2962,5.978401,0.3444,6.383187,0.3908,6.787972,0.4346,7.192
758,0.4768,7.597544,0.5131,8.002329,0.5477,8.407115,0.5761,8.8119,0.6036,9.21
6686,0.6281,9.621472,0.653,10.02626,0.6803,10.43104,0.7099,10.83583,0.7412,1
1.24061,0.7737,11.6454,0.803,12.05019,0.8342,12.45497,0.8662,12.85976,0.8945,
13.26454,0.9203,13.66933,0.9411,14.07411,0.9583,14.4789,0.9711,14.88368,0.98
13,15.28847,0.9868,15.69326,0.991,16.09804,0.9943,16.50283,0.9967,16.90761,0.
9981,17.3124,0.9994,17.71718,0.9998,18.12197,0.9999,18.52676,1,18.98154)

N(6,2)%70+N(12,2)%30
CONT(0.0009,0.2692693,0.0027,0.6620168,0.0043,1.054764,0.0078,1.447512,0.0
142,1.840259,0.0215,2.233007,0.0331,2.625754,0.0503,3.018502,0.0718,3.411249
,0.1,3.803997,0.133,4.196744,0.1716,4.589492,0.217,4.982239,0.2681,5.374987,0.
3185,5.767734,0.3701,6.160482,0.4251,6.553229,0.4764,6.945977,0.5263,7.33872
4,0.5678,7.731472,0.6065,8.124219,0.6424,8.516967,0.6701,8.909715,0.6953,9.30
2462,0.7179,9.69521,0.7376,10.08796,0.7594,10.4807,0.783,10.87345,0.8081,11.2
662,0.8315,11.65895,0.8533,12.05169,0.8761,12.44444,0.8994,12.83719,0.9187,1
3.22994,0.9373,13.62268,0.9529,14.01543,0.9673,14.40818,0.9769,14.80093,0.98

51,15.19367,0.9893,15.58642,0.9924,15.97917,0.9952,16.37192,0.997,16.76466,0.9984,17.15741,0.9992,17.55016,0.9998,17.94291,1,18.33565)

N(6,2)%80+N(12,2)%20
CONT(0.0009,0.2568088,0.0028,0.6459962,0.0047,1.035184,0.0082,1.424371,0.015,1.813558,0.0231,2.202746,0.0352,2.591933,0.0555,2.98112,0.0785,3.370308,0.1089,3.759495,0.1457,4.148682,0.1894,4.53787,0.2386,4.927057,0.2998,5.316245,0.3543,5.705432,0.4129,6.094619,0.4748,6.483807,0.5356,6.872994,0.5905,7.262181,0.6389,7.651369,0.6815,8.040556,0.72,8.429743,0.7512,8.818931,0.7752,9.208118,0.7963,9.597306,0.8135,9.986493,0.8323,10.37568,0.8496,10.76487,0.8659,11.15406,0.8818,11.54324,0.8984,11.93243,0.9131,12.32162,0.9285,12.7108,0.9433,13.09999,0.9569,13.48918,0.9663,13.87837,0.9759,14.26755,0.9829,14.65674,0.9883,15.04593,0.9917,15.43512,0.9941,15.8243,0.9958,16.21349,0.9971,16.60268,0.9987,16.99187,0.9992,17.38105,0.9999,17.77024,1,18.15943)

N(6,2)%90+N(12,2)%10
CONT(0.001,0.2568088,0.003,0.6459962,0.0052,1.035184,0.0095,1.424371,0.0167,1.813558,0.0256,2.202746,0.0396,2.591933,0.0619,2.98112,0.0882,3.370308,0.1216,3.759495,0.1628,4.148682,0.2122,4.53787,0.2676,4.927057,0.3351,5.316245,0.3966,5.705432,0.4629,6.094619,0.5325,6.483807,0.5991,6.872994,0.6602,7.262181,0.7136,7.651369,0.7609,8.040556,0.8036,8.429743,0.8374,8.818931,0.8612,9.208118,0.8805,9.597306,0.8956,9.986493,0.9097,10.37568,0.9215,10.76487,0.9317,11.15406,0.9405,11.54324,0.9494,11.93243,0.9569,12.32162,0.9659,12.7108,0.9716,13.09999,0.9785,13.48918,0.9833,13.8792,1,18.15943)

EK5:

EXPO(4) + EXPO(6) karma dağılımı için oluşturulan ampirik dağılımlar

EXPO(4)%50+EXPO(6)%50
CONT(0.0178,0.07969,0.0487,0.2375,0.0832,0.3954,0.1163,0.553,0.145,0.7111,0.1732,0.868,0.1964,1.026,0.2246,1.184,0.2486,1.3425,0.2718,1.5004,0.2967,1.6582,0.3208,1.8116,0.3412,1.9739,0.3603,2.1318,0.382,2.2896,0.4027,2.4475,0.4193,2.6054,0.4371,2.7632,0.4556,2.9211,0.4723,3.0789,0.4889,3.2368,0.5056,3.3946,0.5191,3.5525,0.5353,3.7104,0.5462,3.8682,0.5597,4.026,0.573,4.1839,0.5888,4.3418,0.601,4.4996,0.6132,4.6575,0.6249,4.8154,0.6354,4.9732,0.6455,5.1311,0.6566,5.2889,0.6681,5.4468,0.6781,5.6046,0.6866,5.7625,0.6967,5.9204,0.7064,6.0782,0.7146,6.2361,0.7252,6.3939,0.7347,6.5518,0.7426,6.7096,0.7497,6.8675,0.7563,7.025,0.7638,7.1832,0.7707,7.3411,0.778,7.4989,0.7841,7.6568,0.7911,7.8146,0.7987,7.9725,0.8051,8.1303,0.8109,8.2882,0.8175,8.4461,0.822,8.6039,0.8271,8.7618,0.8337,8.9196,0.8394,9.0777,0.8436,9.2353,0.8481,9.3932,0.8535,9.5511,0.8578,9.7089,0.8611,9.8668,0.8659,10.0246,0.8699,10.182,0.874,10.34,0.8781,10.4982,0.8805,10.656,0.8847,10.8139,0.8885,10.9718,0.8929,11.1296,0.8965,11.2875,0.8994,11.4454,0.903,11.603,0.9053,11.7611,0.9085,11.9189,0.9105,12.076,0.9128,12.2346,0.9157,12.3925,0.9189,12.5504,0.9211,12.708,0.923,12.866,0.9251,13.0239,0.9273,13.1818,0.9295,13.339,0.9318,13.4975,0.9338,13.6553,0.936,13.8132,0.9374,13.9711,0.9388,14.128,0.9403,14.2868,0.9415,14.4446,0.943,14.6025,0.9447,14.76,0.9464,14.918,0.9483,15.076,0.9497,15.2339,0.9513,15.3918,0.9528,15.5496,0.9542,15.707,0.9553,15.8653,0.956,16.023,0.9577,16.1811,0.9601,16.3389,0.9615,16.4968,0.9626,16.6546,0.9632,16.8125,0.9647,16.9703,0.9658,17.1282,0.9662,17.2861,0.9671,17.4439,0.9679,17.6018,0.9688,17.7596,0.9694,17.9175,0.9702,18.0753,0.9709,18.2332,0.9719,18.3911,0.9726,18.5489,0.9732,18.7068,0.9744,18.8646,0.9748,19.022,0.9753,19.1803,0.9759,19.3382,0.9764,19.4961,0.9770,19.6539,0.978,19.8118,0.9785,19.9696,0.979,20.1275,0.9796,20.2853,0.9799,20.4432,0.9804,

20.6011,0.981,20.7589,0.9812,20.9168,0.9814,21.0746,0.9819,21.2325,0.9826,21.3903,0.9827,21.5482,0.9829,21.706,0.9832,21.8639,0.9841,22.0218,0.9844,22.1796,0.9849,22.3375,0.9851,22.4953,0.9859,22.6532,0.9862,22.8111,0.987,22.9689,0.9872,23.1268,0.9873,23.2846,0.9876,23.4425,0.988,23.6003,0.9884,23.7582,0.9886,23.9161,0.9888,24.073,0.9893,24.2318,0.9899,24.3896,0.9904,24.5475,0.9907,24.705,0.9914,24.8632,0.9915,25.0211,0.9915,25.1789,0.9916,25.3368,0.9918,25.4946,0.9919,25.6525,0.9921,25.8103,0.9922,25.9682,0.9923,26.1261,0.9926,26.2839,0.9927,26.4418,0.9928,26.5996,0.9929,26.7575,0.9932,27.0732,0.9935,27.2311,0.9938,27.388,0.9942,27.5468,0.9943,27.7046,0.9945,27.8625,0.9946,28.0203,0.9949,28.1782,0.995,28.3361,0.9951,28.6518,0.9952,28.8096,0.9954,28.9675,0.9956,29.1253,0.9956,29.2832,0.9958,29.4411,0.996,29.5989,0.9961,29.7568,0.9962,29.9146,0.9965,30.23038,0.9966,30.388,0.9969,31.0196,0.997,31.3353,0.9971,31.4932,0.9972,31.6510,0.9973,31.8089,0.9974,31.9668,0.9975,32.1246,0.9976,32.756,0.9977,32.9139,0.9978,33.0718,0.9982,34.0189,0.9984,34.1768,0.9985,34.3346,0.9986,34.4952,0.9987,35.1239,0.9989,35.7553,1,37.018)

EXPO(4)%60+EXPO(6)%40

CONT(0.0188,0.079,0.0521,0.237548,0.0864,0.3954,0.1192,0.5532,0.1485,0.7111,0.1778,0.8689766,0.2020,1.0268,0.2315,1.1846,0.2562,1.3425,0.2811,1.500405,0.3072,1.658262,0.3328,1.816119,0.3531,1.9739,0.3725,2.131833,0.3928,2.28969,0.4137,2.447547,0.4304,2.6054,0.4492,2.763261,0.4679,2.921118,0.4853,3.078975,0.5023,3.236832,0.5182,3.394689,0.5323,3.5525,0.5479,3.7104,0.5592,3.8682,0.5731,4.026117,0.5858,4.183974,0.6017,4.341831,0.6128,4.499688,0.6244,4.657545,0.6364,4.815402,0.6477,4.973259,0.6591,5.131116,0.6704,5.2889,0.6818,5.44683,0.6916,5.604687,0.7001,5.762544,0.7107,5.920401,0.7203,6.078258,0.7289,6.236115,0.738,6.393972,0.7469,6.551829,0.755,6.709686,0.7627,6.867543,0.7693,7.0254,0.771,7.183257,0.7842,7.341114,0.7912,7.498971,0.7972,7.656,0.8044,7.814,0.8125,7.972542,0.8197,8.1303,0.8255,8.288,0.8319,8.446,0.8367,8.603,0.8422,8.7918,0.848,8.9196,0.8535,9.077,0.8574,9.2353,0.8615,9.3932,0.8662,9.5511,0.8702,

9.7089,0.8734,9.8668,0.8776,10.024,0.8815,10.18,0.885,10.34,0.8887,10.49,0.890
9,10.65,0.8949,10.81,0.8983,10.97,0.902,11.12,0.9054,11.28,0.9085,11.44,0.9116,
11.603,0.914,11.761,0.9173,11.9189,0.9187,12.076,0.9206,12.23,0.9233,12.39,0.9
264,12.55,0.9286,12.70,0.9304,12.86,0.9323,13.02,0.9344,13.18,0.9364,13.33,0.93
84,13.49,0.9402,13.65,0.9425,13.81,0.944,13.97,0.9451,14.12,0.9463,14.28,0.9474
,14.44,0.949,14.602,0.9507,14.76,0.9523,14.91,0.954,15.07,0.9557,15.23,0.9575,1
5.39,0.9586,15.54,0.9598,15.70754,0.9607,15.86,0.9613,16.0232,0.963,16.1811,0.
9652,16.33,0.9667,16.49,0.9676,16.65,0.9681,16.81,0.9695,16.97,0.9705,17.12,0.9
708,17.28611,0.9716,17.44,0.9724,17.60182,0.9731,17.75,0.9736,17.91753,0.9745
,18.075,0.975,18.233,0.9759,18.39,0.9765,18.54896,0.977,18.70682,0.978,18.86,0.
9783,19.02,0.9788,19.18039,0.9795,19.33,0.9799,19.4961,0.9804,19.65,0.9813,19.
811,0.9818,19.96,0.9823,20.12,0.9827,20.28,0.9828,20.44,0.9833,20.60,0.9838,20.
75,0.984,20.91,0.9842,21.07,0.9847,21.23,0.9851,21.39,0.9852,21.54,0.9853,21.7,
0.9856,21.86,0.9862,22.02,0.9865,22.17,0.987,22.33,0.9871,22.49,0.9878,22.65,0.
9881,22.81,0.9888,22.96,0.989,23.12,0.9891,23.28,0.9894,23.44,0.9898,23.6,0.990
1,23.75,0.9903,23.91,0.9905,24.07,0.991,24.23,0.9916,24.38,0.9919,24.54,0.9921,
24.7,0.9928,24.86,0.9929,25.02,1,27.7)

EXPO(4)%70+EXPO(6)%30

CONT(0.0158,0.0693,0.047,0.2066,0.072,0.343,0.1078,0.4810,0.1353,0.618285,0.
1633,0.755,0.1889,0.8927,0.211,1.0299,0.2366,1.167195,0.26,1.304422,0.281,1.44
16,0.3031,1.5788,0.3268,1.7161,0.3478,1.8533,0.3648,1.990558,0.3838,2.127785,
0.4015,2.265013,0.4187,2.40224,0.4361,2.5394,0.4508,2.6766,0.4674,2.813922,0.
4837,2.9511,0.5001,3.088,0.5143,3.22,0.5284,3.362831,0.5411,3.5,0.5548,3.6372,
0.5682,3.774513,0.5792,3.91,0.5903,4.0489,0.6027,4.1861,0.6164,4.323422,0.626
9,4.4606,0.6369,4.597876,0.6475,4.7351,0.657,4.8723,0.6671,5,0.6773,5.146785,0
.6867,5.284012,0.6976,5.42124,0.7058,5.5584,0.7137,5.695694,0.7211,5.832921,0
.7306,5.970149,0.7384,6.1073,0.7454,6.244,0.7533,6.3818,0.7622,6.591,0.7682,6.
6562,0.7752,6.793512,0.7818,6.93,0.787,7.067,0.7926,7.2051,0.7993,7.3424,0.805

2,7.4796,0.811,7.6168,0.8218,7.89133,0.8283,8.028558,0.8346,8.1657,0.8395,8.30
3012,0.8452,8.440239,0.8487,8.577,0.8536,8.7146,0.8573,8.851921,0.8626,8.9891
48,0.8670,9.1263,0.8699,9.2636,0.8735,9.400830,0.8775,9.538057,0.8816,9.6752,
0.8838,9.812512,0.8865,9.949739,0.8902,10.08697,0.8933,10.22419,0.8961,10.36,
0.8986,10.49865,0.9004,10.63588,0.9033,10.7731,0.9062,10.91033,0.9098,11.047,
0.9122,11.184,0.9156,11.322,0.9179,11.45,0.92,11.596,0.9222,11.733,0.9248,11.8
709,0.9268,12,0.928,12.145,0.9301,12.282,0.9318,12.41,0.9347,12.55,0.9362,12.6
9,0.9378,12.83,0.9393,12.9687,0.941,13.10,0.9428,13.24,0.9444,13.38,0.9462,13.5
176,0.9475,13.65488,0.9495,13.79,0.9506,13.92,0.9513,14.066,0.9521,14.203,0.95
33,14.34,0.9544,14.47,0.9556,14.61,0.957,14.752,0.9584,14.8899,0.9595,15.02,0.9
611,15.16,0.9624,15.30,0.9633,15.43,0.9641,15.57,0.9651,15.71,0.9659,15.85,0.96
67,15.98,0.9683,16.12,0.9694,16.26,0.971,16.39,0.9718,16.53,0.9724,16.67,0.9728
,16.811,0.9739,16.9483,0.9746,17.085,0.9754,17.222,0.9757,17.36,0.9763,17.49,0.
9772,17.63,0.9776,17.77,0.9801,18.59,0.9805,18.73,0.9813,18.86,0.9816,19.006,0.
9816,19.14,0.9828,19.28,0.9831,19.41,0.9832,19.555,0.9839,19.69,0.9843,19.83,0.
9847,19.96,0.9849,20.10,0.9855,20.24,0.9858,20.37,0.9859,20.51,0.9864,20.65,0.9
866,20.79,0.9872,21.202,0.9876,21.33,0.9877,21.47,0.9879,21.61,0.988,21.75,0.98
82,21.88,0.9887,22.02,0.989,22.16,0.9895,22.3,0.9895,22.43,0.9895,22.57,0.9901,
22.71,0.9906,22.84,0.9927,24.22,0.994,24.77,0.995,26.27,0.996,28.2,0.9977,30.25,
1,37)

EXPO(4)%80+EXPO(6)%20

CONT(0.016,0.06648,0.0466,0.19792,0.0785,0.32935,0.1062,0.46079,0.1351,0.59
2236,0.1624,0.72367,0.1875,0.855113,0.2101,0.98655,0.236,1.11799,0.2583,1.249
4,0.2793,1.38086,0.3012,1.5123,0.3243,1.64374,0.3484,1.7751,0.3667,1.9066,0.38
37,2.038059,0.4017,2.1694,0.4185,2.3,0.4352,2.4323,0.4497,2.5638,0.4641,2.6952
,0.4807,2.8266,0.4969,2.95,0.5136,3.089,0.5275,3.221,0.5421,3.3524,0.5539,3.483
8,0.5667,3.6153,0.5805,3.7467,0.5911,3.8781,0.6037,4.0096,0.6145,4.14107,0.627
,4.2725,0.6396,4.4095,0.648,4.535,0.6579,4.666,0.6682,4.7982,0.6773,4.9297,0.68

65,5.061144,0.6963,5.1925,0.7064,5.324,0.7152,5.4554,0.723,5.5868,0.7306,5.718
3,0.7384,5.8497,0.7473,5.981213,0.7548,6.1126,0.768,6.3755,0.776,6.5069,0.7812
,6.6384,0.788,6.7698,0.7942,6.901282,0.80,7.03272,0.8059,7.164159,0.8116,7.295
5,0.818,7.427,0.8236,7.5584,0.8282,7.6899,0.8328,7.821351,0.8387,7.9527,0.8439
,8.0842,0.8508,8.2156,0.855,8.3471,0.8594,8.4785,0.8632,8.6099,0.8675,8.74142,
0.8719,8.872859,0.8768,9.0042,0.8802,9.1357,0.8832,9.267174,0.8865,9.3986,0.8
896,9.53005,0.8929,9.661489,0.8955,9.7929,0.8979,9.9243,0.9014,10.0558,0.9042
,10.18,0.9067,10.31,0.9095,10.45,0.9111,10.58,0.9133,10.71,0.9166,10.84,0.9189,
10.97,0.9217,11.10,0.9238,11.23,0.9263,11.37,0.9283,11.5,0.9306,11.63,0.9322,11
.76,0.9343,11.89,0.9357,12.0273,0.9369,12.15,0.9387,12.29,0.9396,12.42,0.942,12
.55,0.9431,12.68,0.9447,12.81,0.946,12.94,0.9472,13.07,0.9493,13.21,0.9508,13.3
4,0.9518,13.47,0.9534,13.6,0.9545,13.73,0.9559,13.86,0.9565,13.99,0.9573,14.13,
0.9583,14.26,0.9594,14.39,0.9601,14.52,0.961,14.65,0.9623,14.78,0.9631,14.91,0.
964,15.05,0.9655,15.18,0.967,15.31,0.9675,15.44,0.9682,15.57,0.969,15.7,0.9698,
15.83,0.9707,15.97,0.9717,16.1,0.9729,16.23,0.9737,16.36,0.975,16.49,0.9756,16.
62,0.9758,16.75,0.9767,16.89,0.9774,17.02,0.9784,17.15,0.9786,17.28,0.979,17.41
,0.9799,17.54,0.9803,17.67,0.9807,17.81,0.9807,17.94,0.9815,18.07,0.9819,18.2,0.
9823,18.33,0.9827,18.46,0.9829,18.59,0.9843,18.86,0.9875,20.04,0.9891,20.70,0.9
915,22.27,0.9928,22.93,0.9943,24.38,1,29)

EXPO(4)%90+EXPO(6)%10

CONT(0.0162,0.06648,0.0481,0.1979207,0.0804,0.3293591,0.1101,0.4607976,0.1
383,0.592236,0.1672,0.7236,0.193,0.855,0.2168,0.98655,0.2435,1.11799,0.2662,1.
2494,0.2874,1.38086,0.3103,1.512305,0.3329,1.643744,0.3572,1.775182,0.3763,1.
90662,0.3933,2.03805,0.4114,2.1694,0.4284,2.3,0.4455,2.4323,0.4611,2.563813,0.
4756,2.695251,0.4981,2.82669,0.5083,2.9581,0.5251,3.089567,0.5398,3.221,0.552
8,3.35244,0.5658,3.483882,0.5794,3.6115321,0.5928,3.7467,0.6036,3.8781,0.616,
4.009636,0.6271,4.14107,0.6389,4.272513,0.6511,4.403951,0.6603,4.53539,0.671
2,4.666828,0.6807,4.7982,0.6892,4.9297,0.6984,5.0611,0.7079,5.192582,0.7185,5.

324020,0.7274,5.455459,0.7353,5.5868,0.7437,5.7183,0.751,5.849774,0.7603,5.98
12,0.7678,6.1126,0.773,6.244,0.7802,6.3755,0.787,6.506967,0.792,6.638405,0.798
8,6.7698,0.8044,6.901282,0.8102,7.03272,0.8161,7.164159,0.8218,7.295597,0.828
2,7.427036,0.8336,7.558474,0.8378,7.6899,0.8423,7.821351,0.8479,7.95279,0.853
2,8.084228,0.8601,8.21566,0.8646,8.347105,0.8692,8.478543,0.873,8.609982,0.87
71,8.74142,0.8809,8.872859,0.8858,9.0042,0.8895,9.135736,0.8921,9.267174,0.89
56,9.398613,0.8985,9.530051,0.9017,9.6614,0.9042,9.792928,0.9072,9.92,0.911,1
0.05,0.9137,10.18,0.916,10.31,0.9186,10.45,0.9203,10.58,0.9223,10.713,0.9252,10
.844,0.9273,10.97587,0.9299,11.10731,0.9317,11.23875,0.9343,11.37,0.9363,11.5
0163,0.9383,11.633,0.9398,11.76,0.9414,11.8959,0.9429,12.02,0.944,12.15882,0.9
453,12.29,0.9461,12.4217,0.9482,12.55314,0.9495,12.68457,0.951,12.816,0.9522,
12.94745,0.9534,13.07889,0.9556,13.21033,0.9569,13.34177,0.9578,13.47,0.959,1
3.6,0.9598,13.73,0.9612,13.86,0.9617,13.99,0.9623,14.13,0.9632,14.26,0.9641,14.
39,0.9648,14.52,0.9658,14.65,0.9668,14.78,0.9677,14.91,0.9685,15.05,0.9699,15.1
8,0.9714,15.31,0.9719,15.44,0.9725,15.57,0.9739,15.83,0.9747,15.97,0.9767,16.23
,0.9788,16.49,0.9817,17.15,0.9834,17.67,0.9854,18.33,0.9874,18.86,0.9887,19.38,
0.9904,20.04,0.991,20.17,0.992,20.70,0.9935,22.01,0.9951,22.93,1,30)

EK6:

EXPO(3) + EXPO(6) karma dağılımı için oluşturulan ampirik dağılımlar

EXPO(3)%40+EXPO(6)%60
CONT(0.0208,0.0905632,0.0639,0.270,0.1045,0.45052,0.1417,0.63051,0.1772,0.81049,0.2096,0.99047,0.2405,1.170458,0.274,1.35044,0.2993,1.530423,0.3294,1.71,0.3545,1.890388,0.3742,2.07037,0.4012,2.250353,0.4252,2.430335,0.4489,2.610317,0.4694,2.7903,0.489,2.9702,0.5068,3.150265,0.5259,3.3302,0.5426,3.51023,0.5603,3.690212,0.5732,3.870195,0.59,4.050177,0.6052,4.23016,0.6189,4.410142,0.6342,4.590124,0.6478,4.770107,0.66,4.95,0.6715,5.130072,0.683,5.31,0.694,5.49,0.706,5.670019,0.7153,5.850002,0.725,6.029984,0.734,6.2099,0.744,6.3899,0.754,6.569931,0.7621,6.749914,0.77,6.9298,0.7775,7.109879,0.784,7.2898,0.7907,7.469844,0.7985,7.649826,0.8059,7.829808,0.8131,8,0.8206,8.189773,0.826,8.369756,0.8317,8.549738,0.8368,8.729721,0.8433,8.909703,0.8482,9.089686,0.8525,9.2696,0.8576,9.449651,0.8627,9.629633,0.866,9.809615,0.8702,9.98,0.874,10.16958,0.8815,10.52955,0.8855,10.70953,0.8885,10.88951,0.8933,11.06949,0.8967,11.24948,0.9002,11.42946,0.9038,11.60944,0.9065,11.78942,0.9105,11.96,0.9138,12.14,0.9177,12.32,0.9207,12.509,0.923,12.68,0.9254,12.86,0.928,13.0493,0.9302,13.22,0.9326,13.40926,0.9351,13.58925,0.9376,13.76,0.9392,13.94,0.9414,14.12,0.9427,14.309,0.9445,14.48,0.9456,14.669,0.9476,14.84,0.9493,15.02911,0.9513,15.209,0.9523,15.38907,0.9538,15.56905,0.9552,15.749,0.9562,15.92902,0.9575,16.109,0.9594,16.28898,0.9609,16.46897,0.9619,16.64895,0.9644,17.00891,0.9658,17.1889,0.9666,17.36888,0.9679,17.54886,0.969,17.7288,0.9712,18.26,0.9738,18.8,0.9746,18.98872,0.9751,19.6187,0.9757,19.34,0.9772,19.7,0.9801,20.24,0.9819,21.32849,0.9824,21.688,0.9838,22.04842,0.9848,22.40839,0.9859,22.76835,0.9867,22.94833,0.9872,23.12832,0.9884,23.66826,0.9897,24.38819,0.9922,26.368,1,30)

EXPO(3)%50+EXPO(6)%50

CONT(0.0197,0.0795008,0.0596,0.2373585,0.098,0.3952161,0.1343,0.553,0.2012,0.8687891,0.2282,1.026647,0.2586,1.1845,0.2881,1.3423,0.313,1.50022,0.3387,1.658077,0.3634,1.815935,0.384,1.973793,0.4059,2.13165,0.4279,2.2895,0.45,2.44,0.4699,2.605223,0.4899,2.763081,0.5057,2.920939,0.5231,3.078796,0.541,3.236654,0.5577,3.394511,0.572,3.552369,0.5861,3.710227,0.5976,3.868084,0.6117,4.025942,0.6243,4.1838,0.6372,4.341657,0.6505,4.499515,0.6635,4.657373,0.6758,4.81523,0.6858,4.973088,0.6961,5.130946,0.7059,5.288803,0.7152,5.446661,0.7255,5.604519,0.7341,5.762376,0.7435,5.920234,0.7511,6.078091,0.7594,6.235949,0.7681,6.393807,0.7773,6.551664,0.7849,6.709522,0.7912,6.86738,0.7971,7.025237,0.8034,7.183095,0.8084,7.340953,0.8145,7.49881,0.8203,7.6566,0.8258,7.814526,0.8317,7.972383,0.8386,8.130241,0.8436,8.288099,0.8483,8.445956,0.8526,8.603814,0.8568,8.761672,0.8618,8.919529,0.8661,9.077387,0.8689,9.235244,0.8729,9.393102,0.8777,9.55096,0.8814,9.708817,0.8841,9.866675,0.8876,10.02453,0.8909,10.18239,0.8941,10.34025,0.897,10.49811,0.8991,10.65596,0.9019,10.81382,0.9047,10.97168,0.9087,11.12954,0.9114,11.28739,0.9138,11.44525,0.9172,11.60311,0.9189,11.76097,0.9219,11.91882,0.9237,12.07668,0.9264,12.23454,0.9291,12.39240,0.9314,12.55026,0.9333,12.70811,0.935,12.86597,0.9369,13.02383,0.9384,13.18169,0.9403,13.33954,0.9422,13.4974,0.9444,13.65526,0.9464,13.81312,0.9479,13.97097,0.9495,14.12883,0.9503,14.28669,0.9515,14.44455,0.9529,14.6024,0.9542,14.76026,0.9557,14.91812,0.9573,15.07598,0.9586,15.23384,0.9595,15.39169,0.9611,15.54955,0.9622,15.70741,0.963,15.86527,0.9638,16.02312,0.9651,16.18098,0.9666,16.33884,0.9679,16.4967,0.9687,16.65455,0.9694,16.81241,0.9707,16.97027,0.9719,17.12813,0.9723,17.28598,0.9731,17.44384,0.9753,17.91742,0.9758,18.07,0.9775,18.54,0.979,18.86456,0.9797,19.18028,0.9804,19.49,0.982,19.96,0.9822,20.12742,0.9827,20.28,0.9835,20.60,0.984,20.91671,0.9844,21.23,0.9851,21.39,0.9855,21.86,0.9865,22.02171,0.987,22.49,0.9876,22.65,0.9883,22.96,0.9892,23.60029,0.9896,23.75815,0.9896,23.91601,0.9897,24.07386,0.9901,24.23172,0.9906,24.38,1,30)

EXPO(3)%60+EXPO(6)%40

CONT(0.0216,0.0795008,0.0639,0.2373585,0.1055,0.3952161,0.1414,0.5530738,0.1776,0.7109314,0.2113,0.8687891,0.2401,1.026647,0.2729,1.184504,0.3048,1.342362,0.3302,1.500220,0.3561,1.658077,0.3825,1.815935,0.4037,1.973793,0.4271,2.13165,0.449,2.289508,0.4705,2.447366,0.4911,2.605223,0.5119,2.763081,0.5283,2.920939,0.5458,3.078796,0.5642,3.236654,0.5795,3.394511,0.5942,3.552369,0.6083,3.710227,0.6213,3.868084,0.6361,4.025942,0.6485,4.1838,0.6609,4.341657,0.6739,4.499515,0.6864,4.657373,0.6985,4.81523,0.7078,4.973088,0.7187,5.130946,0.7284,5.288803,0.7375,5.446661,0.7478,5.604519,0.7564,5.762376,0.7661,5.920234,0.7745,6.078091,0.7833,6.235949,0.791,6.393807,0.8002,6.551664,0.8077,6.709522,0.814,6.86738,0.8197,7.025237,0.8256,7.183095,0.8305,7.340953,0.8362,7.49881,0.8413,7.656668,0.8464,7.814526,0.8521,7.972383,0.8587,8.130241,0.8632,8.288099,0.8671,8.445956,0.8719,8.603814,0.8763,8.761672,0.8805,8.919529,0.8843,9.077387,0.887,9.235244,0.8904,9.393102,0.8945,9.55096,0.8978,9.708817,0.9006,9.866675,0.9036,10.02453,0.9067,10.18239,0.9095,10.34025,0.9121,10.49811,0.914,10.65596,0.9165,10.81382,0.9191,10.97168,0.9227,11.12954,0.9253,11.28739,0.9277,11.44525,0.9306,11.60311,0.9322,11.76097,0.9351,11.91882,0.9364,12.07668,0.9386,12.23454,0.9409,12.3924,0.943,12.55026,0.9448,12.70811,0.9463,12.86597,0.9478,13.02383,0.9488,13.18169,0.9502,13.33954,0.9518,13.4974,0.9538,13.65526,0.9557,13.81312,0.957,13.97097,0.9582,14.12883,0.9587,14.28669,0.9598,14.44455,0.9611,14.60240,0.9622,14.76026,0.9634,14.91812,0.9646,15.07598,0.9659,15.23384,0.9666,15.39169,0.9677,15.54955,0.9686,15.70741,0.9691,15.86527,0.9698,16.02312,0.9709,16.18098,0.9722,16.33884,0.9735,16.4967,0.9741,16.65455,0.9747,16.81241,0.9758,16.97027,0.9769,17.12813,0.9773,17.28598,0.978,17.44384,0.9786,17.6017,0.9793,17.75956,0.9799,17.91742,0.9803,18.07527,0.9806,18.23313,0.9811,18.39099,0.9817,18.54885,0.9823,18.7067,0.9829,18.86456,0.9832,19.02242,0.9835,19.18028,0.9839,19.33813,0.9841,19.49599,0.9845,19.65385,0.9851,19.81171,0.9855,19.96956,0.9857,20.12742,0.986,20.28528,0.9861,20.44314,0.9866,20.601,0.9869,20.75885,0.987,20.91671,0.9872,21.07457,0.987

5,21.23243,0.9878,21.39028,0.9879,21.54814,0.9882,21.86386,0.9893,22.49529,0.9906,23.28458,1,30)

EXPO(3)%70+EXPO(6)%30

CONT(0.0201,0.0691859,0.0592,0.2064,0.0957,0.3436,0.1325,0.4808,0.1661,0.6180,0.1967,0.7553,0.2277,0.8925,0.2556,1.0297,0.2843,1.167,0.3141,1.3042,0.3368,1.441,0.3604,1.5786,0.3833,1.7159,0.4068,1.8531,0.4239,1.9903,0.4461,2.1276,0.4658,2.2648,0.4862,2.4020,0.5054,2.5392,0.5233,2.6765,0.5408,2.8137,0.5569,2.9509,0.5719,3.0882,0.587,3.2254,0.6021,3.3626,0.6147,3.4998,0.6284,3.6371,0.6407,3.7743,0.6524,3.91156,0.6657,4.0487,0.6759,4.1860,0.6874,4.3232,0.6984,4.4604,0.7084,4.5977,0.718,4.7349,0.7284,4.8721,0.737,5.0093,0.7461,5.1466,0.7539,5.2838,0.762,5.4210,0.7713,5.5583,0.7791,5.6955,0.7858,5.8327,0.7938,5.9699,0.8014,6.1072,0.8089,6.2444,0.8151,6.3816,0.8229,6.5188,0.8289,6.6561,0.8351,6.7933,0.8402,6.9305,0.8444,7.0678,0.8487,7.2050,0.8531,7.3422,0.8577,7.4794,0.8624,7.6167,0.866,7.7539,0.8705,7.8911,0.8747,8.0284,0.8796,8.1656,0.8825,8.3028,0.8866,8.440088,0.8903,8.5773,0.8938,8.7145,0.8967,8.8517,0.9001,8.9889,0.9027,9.1262,0.9046,9.2634,0.9073,9.40068,0.9105,9.5379,0.9133,9.6751,0.9146,9.8123,0.9171,9.9495,0.9197,10.0868,0.9222,10.224,0.9241,10.3612,0.9256,10.4985,0.9272,10.6357,0.9292,10.7729,0.9306,10.91019,0.9337,11.0474,0.9358,11.1846,0.9384,11.32187,0.9402,11.459,0.9503,12.28247,0.955,12.69415,0.9605,13.38029,0.9658,13.9292,0.9702,14.75257,0.9747,15.57594,0.9805,16.81099,0.9851,18.04604,0.99,20.7906,1,30)

EXPO(3)%80+EXPO(6)%20

CONT(0.0203,0.06629,0.0607,0.1977,0.0987,0.329169,0.1342,0.4606,0.1688,0.59204,0.2,0.7234,0.2318,0.8549,0.2591,0.9863,0.2886,1.1178,0.3181,1.2492,0.3458,1.380682,0.3676,1.5121,0.3912,1.6435,0.4126,1.775,0.4338,1.906439,0.4507,2.037878,0.4729,2.169317,0.495,2.300756,0.5133,2.432195,0.5299,2.5636,0.5476,2.6950,0.5645,2.8265,0.5798,2.9579,0.5956,3.089391,0.6107,3.22083,0.6254,3.35226,

0.6382,3.4837,0.6508,3.6151,0.6632,3.7465,0.6748,3.878025,0.6889,4.009464,0.6993,4.140903,0.7094,4.27343,0.7193,4.403782,0.7307,4.535221,0.739,4.6666,0.7493,4.798099,0.757,4.929538,0.7655,5.060977,0.7743,5.192416,0.7813,5.323855,0.7891,5.455294,0.798,5.586733,0.8041,5.718173,0.8111,5.849612,0.8182,5.981051,0.8254,6.11249,0.832,6.243929,0.8378,6.375368,0.8442,6.506807,0.8495,6.638246,0.8554,6.7696,0.8606,6.901124,0.865,7.032564,0.8696,7.164003,0.8739,7.295442,0.8779,7.426881,0.8831,7.55832,0.8861,7.689759,0.8898,7.821198,0.8933,7.9526,0.9011,8.215515,0.9073,8.478394,0.9104,8.609833,0.9136,8.741272,0.9165,8.872711,0.9191,9.00415,0.921,9.135589,0.923,9.267028,0.925,9.398467,0.9272,9.529906,0.9309,9.792784,0.9331,9.924224,0.935,10.05566,0.9371,10.1871,0.9402,10.44998,0.9414,10.58142,0.9446,10.8443,0.9464,10.97574,0.9491,11.10718,0.9506,11.23861,0.954,11.50149,0.9563,11.76437,0.9592,12.02725,0.9604,12.15869,0.9621,12.29013,0.963,12.42157,0.9642,12.55,0.9651,12.68444,0.9664,12.81588,0.9673,12.94732,0.9691,13.21020,0.9699,13.34164,0.9719,13.60452,0.9728,13.73596,0.9742,13.99884,0.9753,14.26171,0.9768,14.52459,0.9789,15.05035,0.9805,15.44467,0.982,15.83898,0.9847,16.49618,0.9862,17.02193,0.9873,17.41625,0.99,18.73064,1,30)

EXPO(3)%90+EXPO(6)%10

CONT(0.0209,0.0662915,0.0639,0.1977306,0.104,0.3291697,0.1401,0.4606088,0.1763,0.5920479,0.2095,0.723487,0.2424,0.8549261,0.2717,0.9863652,0.3029,1.117804,0.3327,1.249243,0.3611,1.380682,0.3839,1.512122,0.4078,1.643561,0.4299,1.775,0.4525,1.906439,0.4701,2.037878,0.4921,2.169317,0.5144,2.300756,0.5338,2.432195,0.5506,2.563634,0.5686,2.695073,0.5858,2.826513,0.6012,2.957952,0.6173,3.089391,0.6321,3.22083,0.6465,3.352269,0.661,3.483708,0.6734,3.615147,0.6852,3.746586,0.6969,3.878025,0.7106,4.009464,0.7213,4.140903,0.7317,4.272343,0.7414,4.403782,0.7531,4.535221,0.7611,4.666,0.7708,4.798099,0.7788,4.929538,0.7872,5.060977,0.7957,5.192416,0.8028,5.323855,0.8107,5.455294,0.82,5.586733,0.8262,5.718173,0.8328,5.849612,0.8403,5.981051,0.8477,6.11249,0.8543,6.24

3929,0.8597,6.375368,0.865,6.506807,0.8698,6.638246,0.8759,6.769585,0.8801,6.901124,0.8846,7.032564,0.8891,7.164003,0.8928,7.295442,0.8969,7.426881,0.9022,7.55832,0.9048,7.6897,0.9079,7.821198,0.9108,7.952637,0.9142,8.084076,0.9181,8.215515,0.9209,8.346954,0.924,8.478394,0.9298,8.741272,0.932,8.87,0.936,9.135589,0.9395,9.3984,0.9415,9.5299,0.9447,9.792784,0.9487,10.05566,0.9526,10.31854,0.9545,10.58142,0.957,10.8443,0.9607,11.10718,0.9637,11.37005,0.9666,11.63293,0.9688,11.89581,0.971,12.15,0.973,12.42157,0.9786,13.34164,0.9805,13.73596,0.9826,14.13027,0.9842,14.65603,0.9854,15.05035,0.988,15.83898,0.9901,16.49618,0.9918,17.15337,0.995,19.38784,1,30)

EK7:

EXPO(2.4) + EXPO(6) karma dağılımı için oluşturulan ampirik dağılımlar

EXPO(2.4)%20+EXPO(6)%80
CONT(0.0201,0.0911343,0.0588,0.2711148,0.0981,0.4510953,0.1313,0.6310759,
0.1656,0.8110564,0.1962,0.9910369,0.2254,1.171017,0.2553,1.350998,0.2786,1.5
30979,0.3062,1.710959,0.3294,1.89094,0.3518,2.070920,0.3766,2.250901,0.3996,
2.430881,0.4247,2.610862,0.4431,2.7908,0.461,2.970823,0.4788,3.150803,0.4961,
3.330784,0.5121,3.510764,0.5282,3.690745,0.5407,3.870726,0.5535,4.050706,0.5
686,4.230687,0.5832,4.410667,0.5992,4.590648,0.6121,4.770628,0.625,4.950609,
0.6359,5.130589,0.6473,5.3105,0.6593,5.49,0.67,5.670531,0.679,5.850511,0.6888,
6.030492,0.6987,6.210472,0.7088,6.390453,0.72,6.57,0.7279,6.7504,0.736,6.9303
95,0.7446,7.110375,0.7508,7.29,0.7575,7.470336,0.7658,7.650317,0.7727,7.83029
7,0.7817,8.010278,0.7884,8.190258,0.7937,8.370239,0.80,8.550219,0.8053,8.7302
,0.8131,8.9101,0.8189,9.0901,0.8233,9.2701,0.835,9.6301,0.8392,9.81,0.844,9.99,
0.8483,10.17,0.8525,10.35,0.8567,10.53,0.8608,10.70999,0.8705,11.06995,0.8745,
11.24993,0.8821,11.60989,0.8846,11.78987,0.8892,11.96,0.8931,12.14983,0.8981,
12.32981,0.9012,12.50979,0.9044,12.68977,0.9067,12.86975,0.9099,13.04973,0.9
126,13.22971,0.9188,13.58967,0.9217,13.76965,0.9238,13.94964,0.9261,14.12962
,0.9282,14.3096,0.9303,14.48958,0.9322,14.66956,0.9344,14.84954,0.9367,15.029
52,0.9387,15.2095,0.9402,15.38948,0.942,15.56946,0.945,15.92,0.9512,16.64934,
0.9557,17.18929,0.9602,17.90921,0.9647,18.80911,0.9674,19.34905,0.9703,19.88
899,0.974,20.7889,0.976,21.50882,0.979,22.22874,0.9805,22.76868,0.9855,24.388
51,0.9884,25.64837,0.9901,26.72825,1,30)

EXPO(2.4)%30+EXPO(6)%70

CONT(0.0217,0.0911343,0.0654,0.2711148,0.1071,0.4510953,0.1446,0.6310759,0.1821,0.8110564,0.2158,0.9910369,0.2487,1.171017,0.2793,1.350998,0.3033,1.530979,0.3314,1.170959,0.3565,1.89094,0.3808,2.07092,0.4051,2.250901,0.4278,2.430881,0.4529,2.610862,0.4722,2.790842,0.4896,2.970823,0.5078,3.150803,0.5256,3.330784,0.5421,3.510764,0.5583,3.690745,0.572,3.870726,0.5846,4.050706,0.5997,4.230687,0.6133,4.410667,0.6291,4.590648,0.6425,4.770628,0.6548,4.950609,0.6664,5.130589,0.6776,5.31057,0.6891,5.49055,0.6994,5.670531,0.708,5.850511,0.718,6.030492,0.7272,6.210472,0.7359,6.390453,0.7473,6.570434,0.7549,6.750414,0.7627,6.930395,0.7708,7.110375,0.7767,7.290356,0.7822,7.470336,0.7897,7.650317,0.7964,7.830297,0.8045,8.010278,0.8108,8.190258,0.8157,8.370239,0.8212,8.550219,0.826,8.7302,0.8331,8.91018,0.8388,9.09016,0.8428,9.270142,0.8476,9.450122,0.8531,9.630103,0.8571,9.810083,0.8613,9.990064,0.8652,10.17004,0.8692,10.35002,0.8729,10.53001,0.8767,10.70999,0.8804,10.88997,0.8859,11.06995,0.8897,11.24993,0.8929,11.42991,0.8966,11.60989,0.8991,11.78987,0.9032,11.96985,0.9069,12.14983,0.9112,12.32981,0.9139,12.50979,0.9168,12.68977,0.9189,12.86975,0.9216,13.04973,0.924,13.22971,0.9272,13.40969,0.9295,13.58967,0.9321,13.76965,0.9338,13.94964,0.9356,14.12962,0.9374,14.3096,0.9396,14.48958,0.9412,14.66956,0.9433,14.84954,0.9451,15.02952,0.9469,15.2095,0.9481,15.38948,0.9497,15.56946,0.9511,15.74944,0.9521,15.92942,0.9533,16.10940,0.9554,16.28938,0.9568,16.46936,0.958,16.64934,0.9591,16.82932,0.9609,17.0093,0.9621,17.18929,0.9628,17.36927,0.9643,17.54925,0.9654,17.72923,0.9663,17.90921,0.9669,18.08919,0.9677,18.26917,0.9684,18.44915,0.969,18.62913,0.9701,18.80911,0.9709,18.98909,0.9714,19.16907,0.9722,19.34905,0.9727,19.52903,0.9738,19.70901,0.9748,19.88899,0.9754,20.06897,0.9761,20.24895,0.9767,20.42893,0.9772,20.60892,0.9779,20.7889,0.9781,20.96888,0.9785,21.14886,0.9792,21.32884,0.9796,21.50882,0.9799,21.6888,0.9805,21.86878,0.9815,22.04879,0.9822,22.22874,0.9851,23.12864,0.99,25.46839,1,30)

EXPO(2.4)%40+EXPO(6)%60

CONT(0.0242,0.0904494,0.0717,0.2704322,0.1163,0.4504151,0.1577,0.6303979,0.1977,0.8103807,0.2324,0.9903636,0.2672,1.170346,0.3006,1.350329,0.3264,1.530312,0.356,1.170295,0.3828,1.890278,0.4068,2.070261,0.4333,2.250243,0.4568,2.430226,0.4823,2.610209,0.5028,2.790192,0.5212,2.970175,0.539,3.150158,0.5578,3.33014,0.5751,3.510123,0.5926,3.690106,0.6066,3.870089,0.6197,4.050072,0.6343,4.230054,0.6475,4.410037,0.662,4.59002,0.6749,4.77,0.6867,4.949986,0.6977,5.129969,0.7081,5.309951,0.7192,5.489934,0.7291,5.669917,0.7369,5.8499,0.7463,6.029883,0.7545,6.209866,0.7626,6.389848,0.7734,6.569831,0.7801,6.749814,0.787,6.929797,0.7944,7.10978,0.7999,7.289763,0.8055,7.469745,0.8125,7.649728,0.8189,7.829711,0.8264,8.009694,0.8319,8.189677,0.8365,8.36966,0.8411,8.549642,0.8455,8.729625,0.8517,8.909608,0.8568,9.08959,0.8608,9.269574,0.8655,9.449557,0.8701,9.629539,0.874,9.629539,0.8776,9.989505,0.8811,10.16949,0.885,10.34947,0.8884,10.52945,0.8919,10.70944,0.895,10.88942,0.8996,11.0694,0.903,11.24938,0.9061,11.42937,0.9094,11.60935,0.9118,11.78933,0.9157,11.96932,0.9188,12.1493,0.9221,12.32928,0.9247,12.50926,0.9273,12.68925,0.9295,12.86923,0.9319,13.04921,0.934,13.2292,0.9365,13.40918,0.9387,13.58916,0.941,13.76914,0.9424,13.94913,0.9442,14.12911,0.9456,14.30909,0.9474,14.48908,0.9486,14.66906,0.9506,14.84904,0.9522,15.02902,0.9538,15.20901,0.9548,15.38899,0.9561,15.56897,0.9575,15.74896,0.9582,15.92894,0.9594,16.10892,0.9613,16.2889,0.9627,16.46889,0.9637,16.64887,0.9643,16.82885,0.9659,17.00884,0.9671,17.18882,0.9678,17.3688,0.969,17.54878,0.97,17.72877,0.9707,17.90875,0.9712,18.08873,0.9717,18.26872,0.9724,18.4487,0.9729,18.62868,0.9739,18.80866,0.9749,18.98865,0.9754,19.16863,0.976,19.34861,0.9764,19.52859,0.9774,19.70858,0.9783,19.88856,0.9786,20.06854,0.9791,20.24853,0.9797,20.42851,0.9802,20.60849,0.9809,20.78847,0.9811,20.96846,0.9813,21.14844,0.982,21.32842,0.9822,21.50841,0.9825,21.68839,0.983,21.86837,0.9839,22.04835,0.9846,22.22834,0.9849,22.40832,0.9853,22.5883,0.986,22.76829,0.9868,22.94827,0.9873,23.12825,0.9875,23.30823,0.987

7,23.48822,0.9884,23.6682,0.9885,23.84818,0.9886,24.02817,0.9891,24.20815,0.9897,24.38813,0.9902,24.56811,0.9906,24.7481,0.9909,24.92808,1,30)

EXPO(2.4)%50+EXPO(6)%50

CONT(0.0231,0.079387,0.0695,0.237245,0.1118,0.3951031,0.1539,0.5529611,0.1919,0.7108191,0.225,0.8686772,0.259,1.026535,0.2914,1.184393,0.3207,1.342251,0.3479,1.500109,0.3715,1.657967,0.3994,1.815825,0.4233,1.973683,0.4448,2.131541,0.4672,2.289399,0.4888,2.447257,0.5117,2.605115,0.5303,2.762974,0.5464,2.920832,0.562,3.07869,0.5801,3.236548,0.5963,3.394406,0.6103,3.552264,0.6256,3.710122,0.6388,3.86798,0.6498,4.025838,0.6622,4.183696,0.6742,4.341554,0.6871,4.499412,0.6997,4.65727,0.7098,4.815128,0.7201,4.972986,0.7291,5.130844,0.7381,5.288702,0.7477,5.44656,0.7562,5.604418,0.7631,5.762276,0.7707,5.920134,0.7782,6.077992,0.7851,6.23585,0.7925,6.393708,0.8018,6.551566,0.8079,6.709424,0.8134,6.867282,0.8182,7.02514,0.8241,7.182998,0.8281,7.340856,0.8329,7.498714,0.8377,7.656572,0.8423,7.81443,0.848,7.972289,0.8531,8.130147,0.8569,8.288005,0.8609,8.445863,0.8641,8.603721,0.8678,8.761579,0.8727,8.919437,0.8769,9.077295,0.8796,9.235153,0.8829,9.393011,0.8875,9.550869,0.8909,9.708727,0.8939,9.866585,0.8971,10.02444,0.8999,10.1823,0.9026,10.34016,0.9056,10.49802,0.9074,10.65588,0.9099,10.81373,0.9126,10.97159,0.9165,11.12945,0.9193,11.28731,0.921,11.44517,0.9241,11.60302,0.9257,11.76088,0.9285,11.91874,0.9302,12.0766,0.9322,12.23446,0.9346,12.39231,0.9367,12.55017,0.9386,12.70803,0.9401,12.86589,0.9418,13.02375,0.9433,13.1816,0.945,13.33946,0.947,13.49732,0.9488,13.65518,0.9506,13.81304,0.9519,13.97089,0.9531,14.12875,0.9541,14.28661,0.9553,14.44447,0.9564,14.60233,0.9575,14.76018,0.9592,14.91804,0.9606,15.0759,0.9616,15.23376,0.9625,15.39162,0.9638,15.54947,0.9648,15.70733,0.9655,15.86519,0.9661,16.02305,0.9674,16.18091,0.9689,16.33876,0.97,16.49662,0.9708,16.65448,0.9713,16.81234,0.9725,16.97020,0.9733,17.12805,0.9736,17.28591,0.9744,17.44377,0.9749,17.60163,0.9757,17.75949,0.9762,17.91734,0.9766,18.0752,0.9769,18.23306,0.9774,18.39092,0.9779,18.54878,0.9784,18.70663,0.9792,18.86449,

0.9797,19.02235,0.98,19.18021,0.9804,19.33807,0.9811,19.65378,0.9836,20.6009
3,0.99,24.23167,1,30)

EXPO(2.4)%60+EXPO(6)%40

CONT(0.0259,0.079387,0.0751,0.237245,0.1208,0.3951031,0.1654,0.5529611,0.2
05,0.7108191,0.2409,0.8686772,0.2781,1.026535,0.3121,1.184393,0.3422,1.34225
1,0.3713,1.500109,0.3962,1.657967,0.4259,1.815825,0.4505,1.973683,0.474,2.131
541,0.4961,2.289399,0.5171,2.447257,0.5404,2.605115,0.559,2.762974,0.5761,2.9
20832,0.5934,3.07869,0.6126,3.236548,0.6278,3.394406,0.6419,3.552264,0.6568,
3.710122,0.6697,3.86798,0.6807,4.025838,0.6926,4.183696,0.7049,4.341554,0.71
73,4.499412,0.7288,4.46727,0.7398,4.815128,0.7508,4.972986,0.7602,5.130844,0.
7688,5.288702,0.7777,5.44656,0.7857,5.604418,0.7924,5.762276,0.7998,5.920134
,0.8069,6.077992,0.8132,6.23585,0.8191,6.393708,0.8276,6.551566,0.8335,6.7094
24,0.8393,6.867282,0.8442,7.02514,0.8495,7.182998,0.8532,7.340856,0.8577,7.49
8714,0.8618,7.656572,0.8662,7.81443,0.872,7.972289,0.8769,8.130147,0.8803,8.2
88005,0.8837,8.445863,0.8867,8.603721,0.8905,8.761579,0.8947,8.919437,0.8987
,9.077295,0.9016,9.235153,0.9041,9.393011,0.9080,9.550869,0.9109,9.708727,0.9
135,9.866585,0.916,10.02444,0.9186,10.1823,0.9206,10.34016,0.923,10.49802,0.9
245,10.65588,0.9268,10.81373,0.9291,10.97159,0.9322,11.12945,0.9347,11.28731
,0.936,11.44517,0.9384,11.60302,0.9398,11.76088,0.9424,11.91874,0.9435,12.076
6,0.9449,12.23446,0.9468,12.39231,0.9487,12.55017,0.9505,12.70803,0.9517,12.8
6589,0.953,13.02375,0.954,13.1816,0.9552,13.33946,0.9569,13.49732,0.9583,13.6
5518,0.9601,13.81304,0.9612,13.97089,0.962,14.12875,0.9627,14.28661,0.9638,1
4.44447,0.9648,14.60233,0.9657,14.76018,0.9671,14.91804,0.9681,15.0759,0.969
1,15.23376,0.9698,15.39162,0.9706,15.54947,0.9714,15.70733,0.9718,15.86519,0.
9723,16.02305,0.9734,16.18091,0.9747,16.33876,0.9758,16.49662,0.9764,16.6544
8,0.9769,16.81234,0.9779,16.9702,0.9786,17.12805,0.9788,17.28591,0.9795,17.44
377,0.98,17.60163,0.9806,17.75949,0.981,17.91734,0.9813,18.0752,0.9814,18.233

06,0.9818,18.39092,0.9822,18.54878,0.9826,18.70663,0.9832,18.86449,0.9836,19.02235,0.9843,19.33807,0.9854,19.81164,0.9868,20.60093,0.99,22.65309,1,30)

EXPO(2.4)%70+EXPO(6)%30

CONT(0.0241,0.0690721,0.0705,0.2063004,0.1146,0.3435287,0.1561,0.480757,0.1924,0.6179852,0.2313,0.7552135,0.2653,0.8924418,0.2991,1.02967,0.3285,1.166898,0.3571,1.304127,0.3828,1.441355,0.406,1.578583,0.4327,1.715811,0.4588,1.85304,0.4802,1.990268,0.5023,2.127496,0.5226,2.264725,0.5413,2.401953,0.5617,2.539181,0.5818,2.676409,0.5978,2.813638,0.6133,2.950866,0.6284,3.088094,0.6441,3.225323,0.6582,3.362551,0.6703,3.499779,0.6846,3.637007,0.6962,3.774236,0.7071,3.911464,0.7167,4.048692,0.7269,4.18592,0.7379,4.323149,0.7484,4.460377,0.7572,4.597605,0.7659,4.734834,0.7765,4.872062,0.7861,5.00929,0.7935,5.146518,0.8008,5.283747,0.8088,5.420975,0.8151,5.558203,0.8213,5.695432,0.8268,5.83266,0.833,5.969888,0.8385,6.107116,0.8434,6.244345,0.8481,6.381573,0.8553,6.518801,0.8602,6.656029,0.8653,6.793258,0.8692,6.930486,0.873,7.067714,0.8764,7.204943,0.8794,7.342171,0.8826,7.479399,0.8862,7.616627,0.8888,7.753856,0.8929,7.891084,0.8971,8.028312,0.9005,8.165541,0.9025,8.302769,0.9055,8.439997,0.9078,8.577225,0.9104,8.714454,0.9132,8.851682,0.9162,8.98891,0.9189,9.126138,0.9209,9.263367,0.9229,9.400595,0.9259,9.537823,0.9285,9.675052,0.9303,9.81228,0.9316,9.949508,0.9333,10.08674,0.9355,10.22396,0.937,10.36119,0.9383,10.49842,0.9395,10.63565,0.941,10.77288,0.9428,10.91011,0.9451,11.04733,0.9468,11.18456,0.9486,11.32179,0.9497,11.45902,0.9515,11.59625,0.9524,11.73348,0.9541,11.8707,0.9553,12.00793,0.9562,12.14516,0.9576,12.28239,0.9589,12.41962,0.9604,12.55685,0.9616,12.69407,0.9628,12.8313,0.9635,12.96853,0.9643,13.10576,0.965,13.24299,0.9661,13.38022,0.9671,13.51744,0.9682,13.65467,0.9697,13.7919,0.9705,13.92913,0.9709,14.06636,0.9712,14.20358,0.972,14.34081,0.9729,14.47804,0.9735,14.61527,0.9741,14.7525,0.9753,14.88973,0.9759,15.02695,0.9766,15.16418,0.977,15.30141,0.9774,15.43864,0.9779,15.57587,0.9786,15.7131,0.9

803,16.12478,0.9817,16.39924,0.9825,16.67369,0.9841,17.08538,0.985,17.49706,0.9861,17.90875,0.9865,18.45766,0.9879,19.1438,0.99,20.51,1,30)

EXPO(2.4)%80+EXPO(6)%20

CONT(0.0242,0.0661777,0.0734,0.1976172,0.119,0.3290567,0.1596,0.4604962,0.1985,0.5919356,0.2372,0.7233751,0.2717,0.8548146,0.3071,0.9862541,0.3411,1.117694,0.3694,1.249133,0.3958,1.380572,0.4213,1.512012,0.4432,1.643451,0.4701,1.774891,0.4946,1.90633,0.5168,2.03777,0.5374,2.169209,0.5574,2.300649,0.5759,2.432088,0.5954,2.563528,0.6136,2.694967,0.6296,2.826407,0.6448,2.957846,0.6601,3.089286,0.6753,3.220725,0.6885,3.352165,0.7012,3.483604,0.7151,3.615044,0.7261,3.746483,0.7382,3.877923,0.7571,4.140801,0.7669,4.272241,0.7773,4.40368,0.7858,4.53512,0.7939,4.666559,0.8029,4.797999,0.8125,4.929438,0.8199,5.060878,0.827,5.192317,0.8337,5.323757,0.8409,5.455196,0.8472,5.586636,0.8523,5.718075,0.8578,5.849515,0.8635,5.980954,0.8684,6.112394,0.872,6.243833,0.8766,6.375273,0.8821,6.506712,0.8865,6.638151,0.8903,6.769591,0.8945,6.901030,0.8977,7.03247,0.9011,7.163909,0.904,7.295349,0.9067,7.426788,0.9103,7.558228,0.9125,7.689667,0.9149,7.821107,0.9188,7.952546,0.9217,8.083986,0.9244,8.215425,0.9265,8.346865,0.9283,8.478304,0.9305,8.609744,0.9329,8.741183,0.9357,8.872623,0.938,9.004062,0.9398,9.135502,0.9418,9.266941,0.9431,9.39838,0.9451,9.52982,0.947,9.661259,0.9487,9.792699,0.9498,9.924138,0.9511,10.05558,0.9527,10.18702,0.9542,10.31846,0.9552,10.4499,0.9563,10.58134,0.9574,10.71278,0.959,10.84421,0.9602,10.97565,0.9622,11.10709,0.9633,11.23853,0.9643,11.36997,0.9652,11.50141,0.9667,11.63285,0.9673,11.76429,0.9687,11.89573,0.9695,12.02717,0.9701,12.15861,0.9709,12.29005,0.9715,12.42149,0.9725,12.55293,0.9732,12.68437,0.9741,12.81581,0.9744,12.94725,0.975,13.07869,0.9757,13.21013,0.9763,13.34156,0.9769,13.473,0.9778,13.60444,0.9787,13.73588,0.9796,13.99876,0.9799,14.1302,0.9802,14.26164,0.981,14.39308,0.9815,14.52452,0.9817,14.65596,0.9822,14.7874,0.9828,14.91884,0.9832,15.05028,0.9838,15.18172,0.9841,15.31316,0.9842,15.4446,0.9846,15.57604,0.985,15.70748,0.9852,15.83891,0.9857,15.9703

5,0.986,16.10179,0.9866,16.23323,0.9867,16.36467,0.9875,16.49611,0.9877,16.62755,0.9901,17.81051,1,30)

EXPO(2.4)%90+EXPO(6)%10

CONT(0.054,0.0661777,0.0776,0.1976172,0.1259,0.3290567,0.1692,0.4604962,0.2101,0.5919356,0.2507,0.7233751,0.288,0.8548146,0.3248,0.9862541,0.361,1.117694,0.39,1.249133,0.4176,1.380572,0.4454,1.512012,0.4677,1.643451,0.4946,1.774891,0.5206,1.90633,0.5432,2.03777,0.5646,2.169209,0.5847,2.300649,0.6044,2.432088,0.6237,2.563528,0.6416,2.694967,0.6592,2.826407,0.6735,2.957846,0.6889,3.089286,0.7047,3.220725,0.7177,3.352165,0.7307,3.483604,0.7453,3.615044,0.7556,3.746483,0.7676,3.877923,0.7773,4.009362,0.7866,4.140801,0.7961,4.272241,0.8065,4.40368,0.8154,4.53512,0.8231,4.666559,0.8319,4.797999,0.8418,4.929438,0.8492,5.060878,0.856,5.192317,0.8625,5.323757,0.8699,5.455196,0.876,5.586636,0.8814,5.718075,0.8865,5.849515,0.8926,5.980954,0.8975,6.112394,0.9007,6.243833,0.9045,6.375273,0.9084,6.506712,0.9125,6.638151,0.9156,6.769591,0.9191,6.90103,0.922,7.03247,0.9251,7.163909,0.9272,7.295349,0.9294,7.426788,0.9324,7.558228,0.9345,7.689667,0.9363,7.821107,0.9396,7.952546,0.942,8.083986,0.9446,8.215425,0.9466,8.346865,0.9481,8.478304,0.9498,8.609744,0.9517,8.741183,0.9537,8.872623,0.9558,9.004062,0.9576,9.135502,0.9594,9.266941,0.9603,9.39838,0.9619,9.52982,0.9634,9.661259,0.9651,9.792699,0.9662,9.924138,0.9671,10.05558,0.9684,10.18702,0.9697,10.31846,0.9706,10.4499,0.9714,10.58134,0.9721,10.71278,0.9733,10.84421,0.9742,10.97565,0.9759,11.10709,0.9768,11.23853,0.9777,11.36997,0.9783,11.50141,0.9793,11.63285,0.9799,11.76429,0.9808,11.89573,0.9815,12.02717,0.982,12.15861,0.9825,12.29005,0.9829,12.42149,0.9835,12.55293,0.984,12.68437,0.9846,12.81581,0.9848,12.94725,0.9853,13.07869,0.9903,14.91884,1,30)

EK8:

_EXPO(2) + EXPO(6) karma dağılımı için oluşturulan ampirik dağılımlar

EXPO(2)%20+EXPO(6)%80

CONT(0.0217,0.0911343,0.0642,0.2711148,0.1044,0.4510953,0.1402,0.6310759,0.1754,0.8110564,0.2064,0.9910369,0.2369,1.171017,0.2667,1.350998,0.2903,1.530979,0.3184,1.710959,0.3432,1.89094,0.3646,2.07092,0.39,2.250901,0.4136,2.430881,0.4376,2.610862,0.4566,2.790842,0.4749,2.970823,0.4921,3.150803,0.5077,3.330784,0.5222,3.510764,0.5392,3.690745,0.5516,3.870726,0.5643,4.050706,0.5796,4.230687,0.5931,4.410667,0.6087,4.590648,0.6205,4.770628,0.633,4.950609,0.6431,5.130589,0.6541,5.31057,0.6661,5.49055,0.677,5.670531,0.6858,5.850511,0.6951,6.030492,0.7041,6.210472,0.7143,6.390453,0.7245,6.570434,0.7322,6.750414,0.74,6.930395,0.7481,7.110375,0.7543,7.290356,0.7615,7.470336,0.7691,7.650317,0.776,7.830297,0.7845,8.010278,0.7913,8.190258,0.7966,8.370239,0.8026,8.550219,0.8078,8.7302,0.8151,8.91018,0.821,9.090161,0.8254,9.270142,0.831,9.450122,0.8372,9.630103,0.8411,9.810083,0.8459,9.990064,0.8503,10.17004,0.8546,10.35002,0.8586,10.53001,0.8628,10.70999,0.8665,10.88997,0.8723,11.06995,0.8759,11.24993,0.8795,11.42991,0.8837,11.60989,0.8861,11.78987,0.8904,11.96985,0.894,12.14983,0.8991,12.32981,0.9023,12.50979,0.9054,12.68977,0.9076,12.86,0.9108,13.04973,0.9134,13.22971,0.9171,13.40969,0.9195,13.58967,0.9221,13.76965,0.9242,13.94964,0.9265,14.12962,0.9286,14.3096,0.9307,14.48958,0.9325,14.66956,0.9345,14.84954,0.9368,15.02952,0.9388,15.2095,0.9403,15.38948,0.9421,15.56946,0.9437,15.74944,0.945,15.92942,0.9463,16.1094,0.9486,16.28938,0.9499,16.46936,0.9512,16.64934,0.9525,16.83932,0.9544,17.0093,0.9557,17.18929,0.9565,17.36927,0.9581,17.54925,0.9593,17.72923,0.9602,17.90921,0.9609,18.08919,0.9619,18.26917,0.9629,18.44915,0.9635,18.62913,0.9647,18.80911,0.9656,18.98909,0.9663,19.16907,0.9674,19.34905,0.968,19.52903,0.9693,19.70901,0.9703,19.88899,0.9709,20.06897,0.9717,20.24895,0.9724,20.42893,0.9731,20.60892,0.974,20.7889,0.9742,20.96888,0.9747,21.14886,0.9754,21.32884,0.976,21.50882,0.9763,21.6888,0.977,21.86878,0.978,22.04876,0.979,22.22874,0.9793,22.40872,0.9797

,22.5887,0.9805,22.76868,0.9816,22.94866,0.9821,23.12864,0.9824,23.30862,0.99
,26.72,1,30)

EXPO(2)%30+EXPO(6)%70

CONT(0.0238,0.0911343,0.0728,0.2711148,0.1174,0.4510953,0.1578,0.6310759,
0.1967,0.8110564,0.2323,0.9910369,0.2647,1.171017,0.2948,1.350998,0.32,1.530
979,0.3506,1.710959,0.3767,1.89094,0.3998,2.07092,0.4266,2.250901,0.4481,2.43
0881,0.471,2.610862,0.4914,2.790842,0.5097,2.970823,0.5274,3.150803,0.5433,3.
330784,0.5586,3.510764,0.5755,3.690745,0.5883,3.870726,0.6007,4.050706,0.617
1,4.230687,0.6297,4.410667,0.6448,4.590648,0.6566,4.770628,0.6683,4.950609,0.
6783,5.130589,0.689,5.31057,0.7004,5.49055,0.7106,5.670531,0.7189,5.850511,0.
7278,6.030492,0.7356,6.210472,0.744,6.390453,0.7538,6.570434,0.761,6.750414,
0.7682,6.930395,0.7756,7.110375,0.7814,7.290356,0.7877,7.470336,0.7949,7.650
317,0.8014,7.830297,0.8088,8.010278,0.8154,8.190258,0.8203,8.370239,0.8253,8.
550219,0.83,8.7302,0.8364,8.91018,0.842,9.09016,0.8461,9.270142,0.851,9.45012
2,0.8565,9.630103,0.8598,9.810083,0.864,9.990064,0.8681,10.17004,0.8721,10.35
002,0.8756,10.53001,0.8795,10.70999,0.8829,10.88997,0.8882,11.06995,0.8916,1
1.24993,0.895,11.42991,0.8986,11.60989,0.901,11.78987,0.9048,11.96985,0.9083,
12.14983,0.9127,12.32981,0.9155,12.50979,0.9182,12.68977,0.9202,12.86975,0.9
229,13.04973,0.9252,13.22971,0.9283,13.40969,0.9305,13.58967,0.9329,13.76965
,0.9346,13.94964,0.9364,14.12962,0.9381,14.3096,0.9402,14.48958,0.9416,14.669
56,0.9435,14.84954,0.9453,15.02952,0.9471,15.2095,0.9483,15.38948,0.9499,15.5
6946,0.9512,15.74944,0.9522,15.92942,0.9534,16.1094,0.9555,16.28938,0.9568,1
6.46936,0.958,16.64934,0.9591,16.82932,0.9609,17.0093,0.9621,17.18929,0.9628,
17.36927,0.9643,17.54925,0.9654,17.72923,0.9663,17.90921,0.9669,18.08919,0.9
677,18.26917,0.9684,18.44915,0.969,18.62913,0.9701,18.80911,0.9709,18.98909,
0.9714,19.16907,0.9722,19.34905,0.9727,19.52903,0.9738,19.70901,0.9748,19.88
899,0.9754,20.06897,0.9761,20.24895,0.9767,20.42893,0.9772,20.60892,0.9779,2
0.7889,0.9781,20.96888,0.9785,21.14886,0.9792,21.32884,0.9796,21.50882,0.979

9,21.6888,0.9805,21.86878,0.9815,22.04876,0.9822,22.22874,0.9825,22.40872,0.9829,22.5887,0.9837,22.76868,0.9856,23.4886,0.99,25.46839,1,30)

EXPO(2)%40+EXPO(6)%60

CONT(0.0271,0.0903725,0.0808,0.2703556,0.13,0.4503387,0.1752,0.6303218,0.2162,0.8103049,0.2542,0.990288,0.2892,1.170271,0.3209,1.350254,0.3497,1.530237,0.3817,1.71022,0.4091,1.890203,0.4329,2.070186,0.4613,2.25017,0.4843,2.430153,0.5076,2.610136,0.5295,2.790119,0.5484,2.970102,0.5658,3.150085,0.5823,3.330068,0.5987,3.510051,0.6158,3.690034,0.6285,3.870017,0.6412,4.05,0.656,4.229984,0.668,4.409967,0.682,4.58995,0.6927,4.769933,0.704,4.949916,0.7136,5.129899,0.7231,5.309882,0.7341,5.489865,0.7437,5.669848,0.7512,5.849831,0.7592,6.029814,0.7659,6.209797,0.7741,6.389781,0.7828,6.569764,0.789,6.749747,0.7951,6.92973,0.8015,7.109713,0.8067,7.289696,0.8124,7.469679,0.8191,7.649662,0.8252,7.829645,0.8321,8.009628,0.8381,8.189611,0.8426,8.369595,0.8468,8.549578,0.8511,8.729561,0.8567,8.909544,0.8616,9.089527,0.8656,9.26951,0.8701,9.449493,0.8746,9.629476,0.8776,9.809459,0.8811,9.989442,0.8848,10.16943,0.8884,10.34941,0.8917,10.52939,0.8954,10.70937,0.8981,10.88936,0.9024,11.06934,0.9055,11.24932,0.9087,11.42931,0.9118,11.60929,0.9142,11.78927,0.918,11.96926,0.9209,12.14924,0.9244,12.32922,0.927,12.50921,0.9293,12.68919,0.9313,12.86917,0.9337,13.04915,0.9357,13.22914,0.938,13.40912,0.9401,13.5891,0.9422,13.76909,0.9436,13.94907,0.9453,14.12905,0.9465,14.30904,0.9481,14.48902,0.9491,14.669,0.9508,14.84899,0.9524,15.02897,0.954,15.20895,0.955,15.38893,0.9563,15.56892,0.9577,15.7489,0.9584,15.92888,0.9596,16.10887,0.9615,16.28885,0.9628,16.46883,0.9638,16.64882,0.9644,16.8288,0.966,17.00878,0.9672,17.18877,0.9679,17.36875,0.9691,17.54873,0.9701,17.72872,0.9708,17.9087,0.9713,18.08868,0.9718,18.26866,0.9725,18.44865,0.973,18.62863,0.974,18.80861,0.9749,18.9886,0.9754,19.16858,0.976,19.34856,0.9764,19.52855,0.9774,19.70853,0.9782,19.88851,0.9786,20.0685,0.9791,20.24848,0.9797,20.42846,0.9802,20.60844,0.9809,20.78843,0.9811,20.96841,0.9813,21.14839,0.982,21.32838,0.9822,21.50836,0.9825,21.68834

,0.983,21.86833,0.9839,22.04831,0.9846,22.22829,0.9849,22.40828,0.9853,22.588
26,0.986,22.76824,0.99,24.56807,1,30)

EXPO(2)%50+EXPO(6)%50

CONT(0.0262,0.0793101,0.0793,0.2371684,0.1256,0.3950267,0.1709,0.552885,0.
2118,0.7107433,0.2519,0.8686016,0.2849,1.02646,0.3186,1.184318,0.3476,1.3421
76,0.3762,1.500035,0.4057,1.657893,0.4316,1.815751,0.455,1.97361,0.478,2.1314
68,0.5008,2.289326,0.5216,2.447184,0.5417,2.605043,0.5621,2.762901,0.5783,2.9
20759,0.5946,3.078618,0.6118,3.236476,0.6271,3.394334,0.6403,3.552192,0.6556
,3.710051,0.6668,3.867909,0.6775,4.025767,0.6894,4.183626,0.7016,4.341484,0.7
125,4.499342,0.7239,4.6572,0.7325,4.815059,0.7416,4.972917,0.7497,5.130775,0.
7579,5.288634,0.7666,5.446492,0.7739,5.60435,0.7808,5.762208,0.7881,5.920067
,0.7934,6.077925,0.7994,6.235783,0.8064,6.393642,0.8136,6.5515,0.8191,6.70935
8,0.8235,6.867217,0.8274,7.025075,0.8328,7.182933,0.8371,7.340791,0.8414,7.49
865,0.8462,7.656508,0.8504,7.814366,0.8555,7.972225,0.8606,8.130083,0.8646,8.
287941,0.8685,8.445799,0.8714,8.603658,0.8748,8.761516,0.8789,8.919374,0.882
9,9.077233,0.8855,9.235091,0.889,9.392949,0.8931,9.550807,0.8965,9.708666,0.8
988,9.866524,0.9016,10.02438,0.9045,10.18224,0.9071,10.34010,0.91,10.49796,0.
9118,10.65582,0.9141,10.81367,0.9164,10.97153,0.9198,11.12939,0.9222,11.2872
5,0.9244,11.44511,0.9272,11.60297,0.9287,11.76082,0.9312,11.91868,0.9327,12.0
7654,0.9348,12.2344,0.9374,12.39226,0.9393,12.55011,0.941,12.70797,0.9423,12.
86583,0.944,13.02369,0.9452,13.18155,0.947,13.33941,0.9488,13.49726,0.9503,1
3.65512,0.9519,13.81298,0.9532,13.97084,0.9543,14.1287,0.9551,14.28656,0.956
1,14.44441,0.9571,14.60227,0.9581,14.76013,0.9594,14.91799,0.9608,15.07585,0.
9618,15.23371,0.9627,15.39156,0.964,15.54942,0.965,15.70728,0.9657,15.86514,
0.9663,16.023,0.9676,16.18086,0.9691,16.33871,0.9701,16.49657,0.975,17.60158,
0.98,19.18016,0.9851,21.39018,0.99,24.23163,1,30)

EXPO(2)%60+EXPO(6)%40

CONT(0.0297,0.0793101,0.0865,0.2371684,0.1371,0.3950267,0.1852,0.552885,0.2292,0.7107433,0.2735,0.8686016,0.3085,1.02646,0.3436,1.184318,0.3754,1.342176,0.4055,1.500035,0.4364,1.657893,0.4648,1.815751,0.4888,1.97361,0.5128,2.131468,0.5347,2.289326,0.5557,2.447184,0.578,2.605043,0.5995,2.762901,0.6155,2.920759,0.6327,3.078618,0.6496,3.236476,0.6636,3.394334,0.6772,3.552192,0.692,3.710051,0.7033,3.867909,0.7152,4.025767,0.7271,4.183626,0.7394,4.341484,0.7495,4.499342,0.7592,4.6572,0.7677,4.815059,0.7764,4.972917,0.7841,5.130775,0.7914,5.288634,0.7989,5.446492,0.8056,5.60435,0.8126,5.762208,0.8198,5.920067,0.8245,6.077925,0.8303,6.235783,0.8358,6.393642,0.8426,6.5515,0.8481,6.709358,0.8524,6.867217,0.8562,7.025075,0.8608,7.182933,0.865,7.340791,0.8691,7.49865,0.8735,7.656508,0.8775,7.814366,0.8822,7.972225,0.8871,8.130083,0.8905,8.287941,0.8935,8.445799,0.8962,8.603658,0.8994,8.761516,0.9024,8.919374,0.9061,9.077233,0.9083,9.235091,0.9109,9.392949,0.9142,9.550807,0.917,9.708666,0.9189,9.866524,0.9209,10.02438,0.9235,10.18224,0.9254,10.34010,0.9277,10.49796,0.9292,10.65582,0.9312,10.81367,0.933,10.97153,0.9356,11.12939,0.9377,11.28725,0.9396,11.44511,0.9416,11.60297,0.9429,11.76082,0.9452,11.91868,0.9461,12.07654,0.9477,12.2344,0.9498,12.39226,0.9515,12.55011,0.9531,12.70797,0.9541,12.86583,0.9554,13.02369,0.9562,13.18155,0.9574,13.33941,0.9589,13.49726,0.96,13.65512,0.9615,13.81298,0.9627,13.97084,0.9634,14.1287,0.9639,14.28656,0.9648,14.44441,0.9656,14.60227,0.9664,14.76013,0.9674,14.91799,0.9684,15.07585,0.9694,15.23371,0.9701,15.39156,0.9709,15.54942,0.9717,15.70728,0.9721,15.86514,0.9726,16.023,0.9737,16.18086,0.975,16.33871,0.976,16.49657,0.977,16.81229,0.978,16.97015,0.9787,17.12801,0.9789,17.28586,0.9796,17.44372,0.9801,17.60158,0.9807,17.75944,0.9811,17.9173,0.9815,18.07515,0.9816,18.23301,0.985,19.65374,0.99,22.65305,0.9933,24.86306,1,30)

EXPO(2)%70+EXPO(6)%30

CONT(0.0277,0.0689953,0.0819,0.2062238,0.1318,0.3434523,0.1778,0.4806809,0.2207,0.6179094,0.2621,0.7551379,0.3012,0.8923665,0.3339,1.029595,0.3649,1.166824,0.3938,1.304052,0.4237,1.441281,0.4513,1.578509,0.4779,1.715738,0.5042,1.852966,0.5256,1.990195,0.5482,2.127423,0.5696,2.264652,0.5889,2.40188,0.6075,2.539109,0.6277,2.676337,0.6443,2.813566,0.6592,2.950795,0.6736,3.099023,0.6884,3.225252,0.6999,3.36248,0.7121,3.499709,0.7237,3.636937,0.7367,3.774166,0.7458,3.911394,0.7564,4.048623,0.7673,4.185851,0.7769,4.323080,0.7851,4.460308,0.7935,4.597537,0.8003,4.734765,0.8079,4.871994,0.8154,5.009223,0.8218,5.146451,0.8276,5.28368,0.8339,5.420908,0.8393,5.558137,0.8451,5.695365,0.8498,5.832594,0.8551,5.969822,0.859,6.107051,0.8629,6.244279,0.8671,6.381508,0.8726,6.518736,0.8773,6.655965,0.8812,6.793193,0.8845,6.930422,0.8868,7.067651,0.8894,7.204879,0.8928,7.342108,0.8957,7.479336,0.899,7.616565,0.9017,7.753793,0.9054,7.891022,0.9086,8.02825,0.9122,8.165479,0.9141,8.302707,0.9168,8.439936,0.9187,8.577164,0.921,8.714393,0.9228,8.851622,0.9251,8.98885,0.9277,9.126079,0.929,9.263307,0.9309,9.400536,0.9333,9.537764,0.9355,9.674993,0.9364,9.812221,0.9374,9.94945,0.9395,10.08668,0.9412,10.22391,0.9425,10.36114,0.9436,10.49836,0.9447,10.63559,0.9461,10.77282,0.947,10.91005,0.949,11.04728,0.9506,11.18451,0.9522,11.32174,0.9536,11.45896,0.955,11.59619,0.9558,11.73342,0.9571,11.87065,0.9583,12.00788,0.9591,12.14511,0.9606,12.28233,0.962,12.41956,0.9634,12.55679,0.9644,12.69402,0.9654,12.83125,0.9662,12.96848,0.967,13.10571,0.9675,13.24293,0.9684,13.38016,0.9694,13.51739,0.9713,13.79185,0.9721,13.92908,0.9725,14.06631,0.9727,14.20353,0.9733,14.34076,0.9741,14.47799,0.975,14.75245,0.97583,14.88968,0.9771,15.16413,0.9775,15.30136,0.9779,15.43859,0.9783,15.57582,0.979,15.71305,0.9793,15.85028,0.9799,15.98751,0.9808,16.12473,0.9813,16.26196,0.9822,16.39919,0.9826,16.53642,0.9829,16.67365,0.984,16.94811,0.99,20.37882,0.9933,23.26062,1,30)

EXPO(2)%80+EXPO(6)%20

CONT(0.0287,0.0661009,0.0855,0.1975406,0.1373,0.3289803,0.1856,0.4604201,0.2297,0.5918598,0.2707,0.7232995,0.3144,0.8547393,0.3498,0.986179,0.3822,1.117619,0.4136,1.249058,0.4389,1.380498,0.469,1.511938,0.4975,1.643378,0.5225,1.774817,0.5472,1.906257,0.5685,2.037697,0.5931,2.169137,0.6117,2.300576,0.6299,2.432016,0.6474,2.563456,0.6668,2.694896,0.6816,2.826335,0.6971,2.957775,0.7112,3.089215,0.7261,3.220654,0.7372,3.352094,0.749,3.483534,0.7592,3.614974,0.772,3.746413,0.7816,3.877853,0.7915,4.009293,0.802,4.140733,0.8106,4.272172,0.8188,4.403612,0.8269,4.535052,0.8342,4.666492,0.8411,4.797931,0.8471,4.929371,0.8538,5.060811,0.8594,5.19225,0.8641,5.32369,0.8698,5.45513,0.8746,5.58657,0.8796,5.718009,0.8839,5.849449,0.8879,5.980889,0.8911,6.112329,0.8938,6.243768,0.8976,6.375208,0.9018,6.506648,0.906,6.638087,0.9089,6.769527,0.9122,6.900967,0.9139,7.032407,0.9168,7.163846,0.9195,7.295286,0.9225,7.426726,0.9254,7.558166,0.9278,7.689605,0.9295,7.821045,0.9325,7.952485,0.9351,8.083925,0.9379,8.215364,0.9396,8.346804,0.9413,8.478244,0.9433,8.609683,0.9453,8.741123,0.947,8.872563,0.9486,9.004003,0.9503,9.135442,0.9516,9.268682,0.9529,9.398322,0.9541,9.529762,0.9556,9.661201,0.9565,9.792641,0.9571,9.924081,0.9586,10.05552,0.9597,10.18696,0.9607,10.3184,0.9616,10.44984,0.9623,10.58128,0.9633,10.71272,0.9643,10.84416,0.9652,10.9756,0.9667,11.10704,0.9677,11.23848,0.9686,11.36992,0.9696,11.50136,0.9706,11.6328,0.971,11.76424,0.9722,11.89568,0.9729,12.02712,0.9734,12.15856,0.9743,12.29,0.9749,12.42144,0.9758,12.55288,0.9762,12.68432,0.9769,12.81575,0.9773,12.94719,0.9779,13.07863,0.9784,13.21007,0.979,13.34151,0.9794,13.47295,0.9801,13.60439,0.9806,13.73583,0.9811,13.86727,0.9815,13.99871,0.9818,14.13015,0.982,14.26159,0.985,15.44455,0.99,17.54759,0.9925,19.65062,0.995,22.27942,1,30)

EXPO(2)%90+EXPO(6)%10

CONT(0.0301,0.0661009,0.0919,0.1975406,0.1464,0.3289803,0.1985,0.4604201,0.2443,0.5918598,0.289,0.7232995,0.3349,0.8547393,0.3724,0.986179,0.4076,1.1

17619,0.4406,1.249058,0.4669,1.380498,0.4985,1.511938,0.5282,1.643378,0.5536,1.774817,0.5793,1.906257,0.602,2.037697,0.6257,2.169137,0.646,2.300576,0.664,2.432016,0.6821,2.563456,0.7015,2.694896,0.7168,2.826335,0.7329,2.957775,0.7463,3.089215,0.7613,3.220654,0.7722,3.352094,0.7841,3.483534,0.7949,3.614974,0.8078,3.746413,0.8172,3.877853,0.8266,4.009293,0.8374,4.140733,0.846,4.272172,0.8539,4.403612,0.8624,4.532052,0.8694,4.666492,0.8758,4.797931,0.8819,4.929371,0.8887,5.060811,0.8933,5.19225,0.8978,5.32369,0.903,5.45513,0.9076,5.58657,0.9127,5.718009,0.9163,5.849449,0.9201,5.980889,0.9227,6.112329,0.9252,6.243768,0.9282,6.375208,0.9307,6.506648,0.9345,6.638087,0.9369,6.769527,0.9393,6.900967,0.9405,7.032407,0.943,7.163846,0.9449,7.295286,0.9473,7.426726,0.9499,7.558166,0.9518,7.689605,0.953,7.821045,0.9552,7.952485,0.9575,8.083925,0.96,8.215364,0.9614,8.346804,0.9629,8.478244,0.9643,8.609683,0.9658,8.741123,0.9667,8.872563,0.9676,9.004003,0.9694,9.135442,0.9706,9.266882,0.9716,9.398322,0.9722,9.529762,0.9732,9.661201,0.9739,9.792641,0.9746,9.924081,0.9757,10.05552,0.9766,10.18696,0.9774,10.3184,0.9782,10.44984,0.9786,10.58128,0.9792,10.71272,0.9797,10.84416,0.9803,10.9756,0.9813,11.10704,0.9821,11.23848,0.9828,11.36992,0.9836,11.50136,0.9841,11.6328,0.985,11.89568,0.9859,12.15856,0.9867,12.42144,0.9871,12.55288,0.9873,12.68432,0.9877,12.81575,0.988,12.94719,0.9885,13.07863,0.9889,13.21007,0.9893,13.34151,0.9895,13.47295,0.9896,13.60439,0.9897,13.73583,0.99,13.86727,0.9926,15.83887,0.9951,17.54759,0.9975,21.49078,1,30)