ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sadık EYİDOĞAN

FONKSİYON UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2017

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYON UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Sadık EYİDOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez …/…/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

…….....	…….....	……
Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT	Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ	Prof. Dr. Gonca AYIK
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE
……..	……	
Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN	Doç. Dr. Tuncay TUNÇ	
ÜYE	ÜYE	

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FONKSİYON UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Sadık EYİDOĞAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
II. Danışman : Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Yıl: 2017, Sayfa: 59
Jüri : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
: Doç. Dr. Tuncay TUNÇ

Analizdeki temel sorulardan biri sürekli fonksiyon dizisinin noktasal yakınsadığı fonksiyonun sürekli olmasını gerektiren koşulların bulunmasıdır. 1883 yılında Arzela, kapalı ve sınırlı aralıklar üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyon dizisinin limit fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşulu quasi-uniform yakınsaklık kavramı sayesinde verdi. Bu makale yeni bir alan başlatarak birçok çalışmanın doğmasına sebep olmuştur. Caserta, A. ve arkadaşları (2011) Arzela ve Alexandroff koşullarını istatistiksel yakınsaklık kavramını kullanaraktan farklı bir ispat sundular.

Bu çalışmada, Caserta, A. ve arkadaşlarının sunduğu birçok temel yakınsaklık kavramlarını istatistiksel yakınsaklık kavramına uyarlaması incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Quasi-uniform yakınsaklığı, Yoğunluk, Yoğunluk Ölçüsü, İstatistiksel yakınsaklık, İstatistiksel Arzela ve Alexandroff yakınsaklığı

ABSTRACT

MASTER THESIS

STATISTICAL CONVERGENCE IN FUNCTIONAL SPACES

Sadık EYİDOĞAN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
II. Supervisor : Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Year: 2017, Pages: 59
Jury : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
: Doç. Dr. Tuncay TUNÇ

One of the main questions in analysis is what precisely must be added to pointwise convergence of a sequence of continuous functions to preserve continuity of the limit function? In 1883 Arzela gave a necessary and sufficient condition via quasi-uniform convergence for the pointwise limit of a sequence of real-valued continuous functions on a compact interval to be continuous. Arzela's work initiated a study that led to several outstanding papers. Caserta, A. and et al. offer a direct proof of the equivalence of Arzela and Alexandroff conditions using statistical convergence.

In this study, we examine the statistical versions of several classical kinds of convergence of sequences of functions introduced by Caserta (Caserta, 2011) from a topological space to a metric space.

Key words: Quasi-uniform convergence, Density, Density Measure, Statistical convergence, Arzela and Alexandroff statistical convergence

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Cauchy'nin 1821 yılında yayınladığı kitabında, sürekli fonksiyonlar dizisinin noktasal limitinin de sürekli bir fonksiyon olacağı teoremi mevcuttur. Abel'in verdiği örnekle Cauchy'nin ispatının yanlış olduğu görüldü. Cauchy'nin yapmış olduğu yanlış ispat, düzgün yakınsaklık kavramının doğmasına sebep olmuştur. Düzgün yakınsaklık kavramını ilk kullananın Gudermann (1838 yılındaki eliptik fonksiyonlar üzerine çalışmasıyla) olduğu düşünülmektedir. 1841 yılında Gudermann'ın öğrencisi Weierstrass tarafından düzgün yakınsaklık kavramı tanımlandı. Aynı zamanlarda bağımsız bir şekilde Seidel ve Stokes tarafından, benzer kavramlar yayınladıkları makalelerinde yer almıştır.

Düzgün yakınsaklığın, noktasal yakınsaklığa göre getirisi fonksiyon dizilerin süreklilik, Riemann integrallenebilirlik ve ek hipotezlerle birlikte türevlenebilme özelliklerini limit fonksiyona aktarabilmesidir. Daha sonraki süreçlerde süreklilik özelliğini aktarabilmek için minimum koşulları içeren yakınsaklık kavramları sırasıyla Dini, Arzela, Borel, Alexandroff tarafından tanımlanmıştır. Bölüm 2'de tüm bu süreç tarihsel gelişimiyle birlikte incelenecektir.

1951 yılında H. Fast ve H. Steinhaus tarafından reel terimli bir dizi için istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlandı. Bu çalışmada standart yakınsaklık yerine, istatistiksel yakınsaklık kavramını kullanarak Arzela ve Alexandroff yakınsaklığın istatistiksel analoğunu tanımlayarak, sürekli fonksiyon dizilerin limitinin de sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşul Bölüm 3 ve 4'te incelenecektir. Öncelikli olarak istatistiksel yakınsaklık kavramının temel unsuru olan doğal sayılar kümesi üzerindeki yoğunluk kavramı ele alınacaktır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının da gelişim süreci incelenerekten yukarıda belirttiğimiz sürekli fonksiyon dizilerin limitinin de sürekli olabilmesi için istatistiksel Arzela ve Alexandroff koşullarını tanımlama amacına ulaşıp,

X bir topolojik uzay ve (Y,ρ) metrik uzay olmak üzere $f_n : X \longrightarrow Y$ olacak şekilde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sürekli fonksiyon dizisi ve $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu verilsin.
$\forall x \in X$ için $st - limf_n(x) = f(x)$ istatistiksel yakınsaklığı mevcut ise aşağıdaki ifadeler bir birine denktir.

i. f süreklidir

ii. Keyfi $K \subseteq X$ kompakt alt kümesi üzerinde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{st-Arz}{\rightrightarrows} f$

iii. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{st-Al}{\rightrightarrows} f$

temel teoremimizi ispat edeceğiz.

TEŞEKKÜR

Tezin konusunun belirlenmesinde ve araştırma aşamasındaki görüş ve önerileriyle bu çalışmanın oluşmasına sağladığı katkılarından ötürü saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKARSLAN'a minnet duygularımı sunarım.

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde ve karşılaşılan güçlüklerin aşılmasında yol gösterici ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZ I
ABSTRACT II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET III
TEŞEKKÜR V
İÇİNDEKİLER VI
1. GİRİŞ 1
2. LİMİT FONKSİYONU NE ZAMAN SÜREKLİDİR? 3
2.1. Cauchy'nin Meşhur Yanlış İspatı 3
2.2. Weierstrass'ın Düzgün Yakınsaklık Kavramı 6
2.3. Düzgün Yakınsaklık İçin Dini Koşulu 9
2.4. "Convergenza Uniforme a Tratti" Arzela Yakınsaklığı 11
2.5. Arzela Yakınsaklığının Ağlar ile Genellemesi 19
3. YOĞUNLUK VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK KAVRAMI 25
3.1. Doğal Sayılar Kümesinde Yoğunluk Fonksiyonu 25
3.2. Toplanabilme Metoduyla Yoğunluk Fonksiyonu Elde Etme 30
3.3. Asimptotik Yoğunluk Fonksiyonu ve Bazı Özellikleri 39
3.4. Buck'ın Ölçü Yoğunluğu 42
3.5. İstatistiksel Yakınsaklık 46
4. SÜREKLİLİK VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK 53
KAYNAKLAR 59
ÖZGEÇMİŞ 59

1. GİRİŞ

Analizin temel problemlerinden biri sürekli fonksiyon dizisinin noktasal yakınsadığı fonksiyonun sürekli olmasını gerektiren koşulların belirlenmesidir. Cauchy 1821 yılında Cours d'Analyse kitabında sürekli fonksiyonların yakınsak seri toplamlarının sürekli olduğu konusunda bir ispat sundu. 1826 yılında ise Abel, Cauchy'nin ispatını sağlamayan Fourier serileri kapsamında bir örnek buldu ve Cauchy'nin ispatında eksiklik olduğunu belirtti. Daha sonra, Cauchy'nin ispatında kullandığı yöntem yeni bir yakınsaklık kavramının doğmasına sebep oldu ve 1841 yılında Weierstrass limit fonksiyonun sürekliliğini sağlayan düzgün yakınsaklık kavramını tanımladı. 1878 yılında Dini, düzgün yakınsaklık şartından daha hafif olacak şekilde limit fonksiyonların sürekliliği için yeterli koşulu oluşturdu. C. Arzela 1883-1884 yılındaki çalışmasında kapalı aralıklar üzerinde tanımlı sürekli reel değerli fonksiyon dizilerinin noktasal limitinin sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşulu verdi. Arzela 1899-1900 yılındaki çalışmasında bu koşulu "convergenza uniforme a tratti" olarak adlandırdı ve Arzela'nın bu çalışmaları birçok çalışmanın doğmasına sebep oldu. E. Borel 1905 yılındaki çalışmasında Arzela koşulu için "quasiuniform convergence" kavramını oluşturdu. 1948 yılında P.S. Alexandroff aynı soruyu keyfi topolojik uzaydan metrik uzaya tanımlı sürekli fonksiyon dizleri için olan çalışmasını yayınladı. Ayrıca R.G. Bartle 1955 yılındaki çalışmasında Arzela'nın sonucunu topolojik uzayda tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların ağı (net) için genelleştirdi.

G. Di Maio ve L.D.R Kocinac 2011 yılındaki makalesinde standart yakınsaklık yerine istatistiksel yakınsaklık kavramını kullanarak Arzela ve Alexandroff yakınsaklığın istatistiksel analoğunu tanımlayarak sürekli fonksiyon dizilerin limitinin de sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşulu incelemişlerdir. Maio ve Kocinac'ın ele aldığı istatistiksel yakınsaklık kavramının oluşumuna ve tarihsel gelişimine baktığımızda aşağıdaki süreci görürüz.

Reel sayılarda tanımlı bir dizi için istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1951 yılında H. Fast ve H. Steinhaus tarafından verildi. Fakat istatistiksel yakınsaklık kavramı fikri, hemen hemen yakınsaklık (almost convergence) adı altından A. Zygmund tarafından Trigonometric Series kitabının birinci basımında (Warsaw, 1935) verilmiştir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı, matematiğin birçok farklı alanlarında ele alınmış ve uygulamaları yapılmıştır; *toplanabilme teorisinde* A.R. Freedman, J.J. Sember (1981), J.A. Fridy (1985) ve J. Connor (1988), *sayılar teorisinde* P. Erdös (1989), *olasılık teorisinde* J.A. Fridy ve M.K. Khan (1998), *ölçüm teorisinde* H.I Miller (1995), *yaklaşım teorisinde* A.D. Gadjiev ve C. Orhan (2002) gibi isimler temel çalışmaları yapmışlardır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının metrik uzaylarda tanımlı dizilere uyarlanması (P. Kostyrko ve ark. (2000)) istatistiksel yakınsaklık kavramının daha geniş bir alanda incelenmesine sebep oldu. G. Di Maio ve L.D.R Kocinac 2008 yılındaki çalışmasında istatistiksel yakınsaklık kavramını topolojik uzaylarda ele aldılar.

Bu tezde, sürekli fonksiyon dizilerinin limitinin de sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşulun Cauchy (1821)'den G. Di Maio, L.D.R. Kocinac (2011) çalışmasına kadar olan süreci kronolojik olarak inceleyeceğiz.

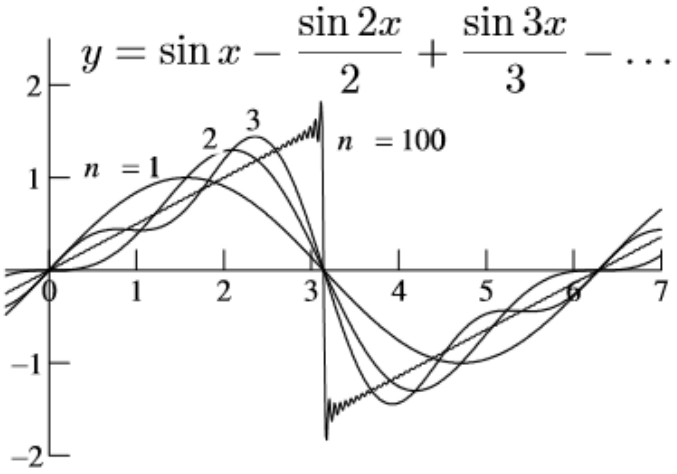
2. LİMİT FONKSİYONU NE ZAMAN SÜREKLİDİR?

2.1. Cauchy'nin Meşhur Yanlış İspatı

Sürekli fonksiyonların yakınsak toplamlarının sürekli olduğu savı Cauchy tarafından (Cours d'Analyse, 1821) öne sürüldü. Abel 1826 yılındaki çalışmasında Cauchy'nin bu teoreminin yanlış olduğunu gösterdi. Abel'in çalışmasında şu ek not yer almaktadır:

> *Üstte belirttiğim Sayın Cauchy'nin çalışmasında şu teorem bulunmakta;*
> $\mathcal{U}_n$*'ler tek değişkenli fonksiyonlar olmak üzere* $\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \cdots$ *serisi verilsin. Seri toplamının yakınsak olduğu değerlerin civarında* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $\mathcal{U}_n$*'ler sürekli ise seri toplamı, yakınsak olduğu değerlerin civarındaki* x*'in sürekli bir fonksiyonudur.*
> *Lakin bu teoremin istisnası olduğu kanaatindeyim. Örneğin;*
> $sin\, x - \frac{1}{2} sin\, 2x + \frac{1}{3} sin\, 3x - \cdots$ *seri toplamını alırsak* m *tam sayı olmak üzere her* $(2m+1)\pi$ *değerleri için seri toplamımız süreksiz olacaktır. Benzer özellikte oldukça fazla seri mevcuttur.* (Hairer, 2008)

Abel'in verdiği bu örneği grafiksel olarak gösterecek olursak limit fonksiyonun $(2m+1)\pi$ değerlerinde süreksiz olduğu görülür.



1: Hairer, 2008; 214s

Cauchy'nin süreklilik tanımı; f fonksiyonunun değişkenindeki sonsuz küçük değişiklikler sonsuz küçük değişikliklere sebep oluyor ise f fonksiyonu süreklidir denir. Yani, sonsuz küçük α değeri için $f(x+\alpha)-f(x)$ değeri sonsuz küçük ise f fonksiyonu süreklidir. Bu sebepten ötürü Cauchy ispatını şu şekilde yapmaktadır.

$S(x) = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \cdots$ seri toplamımızı

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{U}_i(x) + \sum_{i=n}^{\infty} \mathcal{U}_i(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

$$S(x+\alpha) = S_n(x+\alpha) + R_n(x+\alpha)$$

şeklinde yazabiliriz.

$S_n(x)$ fonksiyonu, sürekli fonksiyonların sonlu toplamı olduğundan sürekli olup $S_n(x+\alpha) - S_n(x)$ sonsuz küçük olacaktır.

$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{U}_i(x)$ serisinin yakınsaklığı gereğince yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ değeri için $R_n(x)$ ve $R_n(x+\alpha)$ değerleri sıfıra yakın.

Böylece, ε keyfi küçük pozitif bir sayı olmak üzere

$$|S(x+\alpha)-S(x)| = |S_n(x+\alpha)+R_n(x+\alpha)-S_n(x)-R_n(x)|$$
$$\leq |S_n(x+\alpha)-S_n(x)|+|R_n(x+\alpha)|+|R_n(x)|$$
$$\leq \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon \text{ dir.}$$

Eşitsizliği her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan, $S(x+\alpha)-S(x)$ değeri sonsuz küçük olup $S(x)$ fonksiyonu süreklidir denir (Rickey, 1996).

Günümüz terminolojisinde, Cauchy'nin argümanı geçerli değildir; çünkü $\alpha \to 0$ ve $n \to \infty$ iki limit işlemi birbirinden bağımsız değildir. Cauchy ve Abel bu durumu ifade edememiştir.

Şimdi Cauchy'nin ispatını analiz edelim.

$\varepsilon > 0$ verilsin.

i. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, onların kısmi toplamları $S_n(x)$ de süreklidir. Yani,
$\exists\delta\ \forall\alpha \quad |\alpha| < \delta \ \Rightarrow\ |S_n(x+\alpha)-S_n(x)| < \varepsilon$
Burada dikkat etmeliyiz ki δ değeri ε, x ve n değerine bağlı olduğundan $\delta(\varepsilon, x, n)$ yazılımını kullanalım.

ii. Serimiz x noktasında yakınsak olduğundan
$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \ |R_n(x)| < \varepsilon$$
N değeri ε ve x değerine bağlı olduğundan $N(\varepsilon, x)$ şeklinde yazılır.

iii. Serimiz $x+\alpha$ noktasında yakınsak olduğundan
$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \ |R_n(x+\alpha)| < \varepsilon$$
N değeri ε, x ve α değerine bağlı olduğundan $N(\varepsilon, x+\alpha)$ ifadesi yazılır.

Şimdi kritik gözlemi yapalım; Cauchy'nin ispatı çalışması için öyle bir $M \in \mathbb{N}$ değeri bulmalıyız ki hem $N(\mathcal{E}, x)$ 'den hem de $N(\mathcal{E}, x+\alpha)$ " $|\alpha| < \delta(\mathcal{E}, x, n)$ eşitsizliğini sağlayan her α için" değerinden daha büyük olmalı.

Yani $M = Max_t N(\mathcal{E}, t)$ değeri her $\mathcal{E}$ için var olmalı. Sonuç olarak, şu hipoteze ihtiyaç duyarız.

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists M \quad \forall n > M \quad \forall x \quad |R_n(x)| < \mathcal{E}$$

Bu ise bilindiği gibi daha sonra Weierstrass tarafından 1841 yılında tanımlanan düzgün yakınsaklığın tanımı olup Cauchy'nin teoremini doğru yapacak ve ispatın çalışmasını sağlayan kavram olacaktır (Rickey, 1996).

2.2. Weierstrass'ın Düzgün Yakınsaklık Kavramı

Tanım 2.2.1 (Weierstrass, 1841): $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon dizisi ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer, $\forall\, \mathcal{E} > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ değeri var ki $\forall n > N$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$ koşulu sağlanıyor ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir ve $f_n \rightrightarrows f$ biçiminde gösterilir.

Bu tanımda, N değerinin Cauchy'nin ispatında istenen şarta, sadece $\mathcal{E}$ değerine bağlı olup $x \in A$'dan bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 2.2.2 (Weierstrass'ın 1861 yılı çalışması): Eğer $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor ise $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: Keyfi bir $x_0 \in A$ elemanı alalım. $\mathcal{E} > 0$ değeri verilsin. f fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek için yapmamız gereken öyle bir $\delta > 0$ değeri

bulmalıyız ki $|x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x \in A$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olmalı.

$f_n \rightrightarrows f$ düzgün yakınsak olduğundan $\varepsilon/3 > 0$ için $N \in \mathbb{N}$ değeri var ki $\forall n \geq N$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ eşitsizliği sağlanır.

Buradan bulduğumuz N doğal sayı değeri için f_N fonksiyonu mevcut ve A kümesi üzerinde sürekli (haliyle x_0 noktasında da sürekli) olduğundan

$\varepsilon/3 > 0$ için $\delta^* > 0$ değeri var ki $|x - x_0| < \delta^*$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x \in A$ için $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$ ifadesi yazılır.

Böylece, $\delta = \delta^*$ seçilirse, $|x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x \in A$ için

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

eşitsizliği sağlandığından $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. $x_0 \in A$ keyfi alındığından f fonksiyonu A üzerinde sürekli olacaktır. ■

Cauchy 1853 yılında 1821 yılında sunduğu teoremini yanlış ifade ettiğini kabul eder (ispatını değil) ve $n' > n$ olmak üzere yeterince büyük n değeri için

$$S_{n'}(x) - S_n(x) = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n'-1}(x)$$

ifadesinin mutlak değeri, her x ve n' değerleri için keyfi seçilen ε değerinden daha küçük kalmak koşuluyla teoremini günceller (Laugwitz, 1987). Bu ise Weierstrass'ın düzgün yakınsaklık tanımı için bilinen Cauchy kriteridir.

Tanım 2.2.3 (Cauchy, 1853): $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon dizisi verilsin. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizi, verilen her $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ değeri var ki $\forall n, m > N$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ koşulunu sağlıyor ise $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisine A üzerinde düzgün Cauchy denir.

Teorem 2.2.4 (Cauchy, 1853) $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon dizisi verilsin. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi A üzerinde düzgün Cauchy olması için gerek ve yeter koşul (f_n) dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsamasıdır.

İspat: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizi f fonksiyon dizisine düzgün yakınsasın ve $\varepsilon > 0$ değeri verilsin. $f_n \rightrightarrows f$ olduğundan tanım gereğince $\varepsilon/2 > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ değeri var ki $\forall n > N$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ sağlanır.

Buradan $\forall n, m > N$ için

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olduğundan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi A üzerinde düzgün Cauchy olduğu görülür.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi A üzerinde düzgün Cauchy olsun. O halde tanım gereğince, verilen her $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ değeri var ki $\forall n, m > N$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ ifadesi yazılır. Buradan, her bir $x \in A$ için $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisi olduğu görülür ve $\mathbb{R}$ nin tamlığı gereğince $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yakınsak olması gerektiğinden $f_n(x) \longrightarrow y_x \in \mathbb{R}$ olacak şekilde elemanı mevcuttur. Böylece, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = y_x$ şeklinde tanımlayalım.

İddiamız $f_n \rightrightarrows f$ düzgün yakınsak olduğu.

$\varepsilon > 0$ değeri verilsin. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi düzgün Cauchy olduğundan

$\varepsilon/2 > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$ $\quad (i)$

$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ noktasal yakınsaklığı f fonksiyonun tanımı gereğince açık. Buradan, keyfi bir $x \in A$ için $\varepsilon/2 > 0$ sayısına karşılık $\exists M_x \in \mathbb{N}$ değeri var ki

$$\forall n > M_x \text{ için } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \qquad (ii) \quad \text{yazılır.}$$

Böylece, $\varepsilon > 0$ değeri için (i) ve (ii) durumlarından $N \in \mathbb{N}$ değeri var ki $\forall n > N$ ve $\forall x \in A$ için $m = Max\{N, M_x\}$ seçilirse,

$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

eşitsizliği elde edileceğinden $f_n \rightrightarrows f$ düzgün yakınsak olduğu görülür. ■

2.3. Düzgün Yakınsaklık İçin Dini Koşulu

Bir fonksiyon dizisinin yakınsaklığının düzgün olup olmadığına karar vermek kolay olmadığından düzgün yakınsaklığa karar veren argümanlara ihtiyaç duyarız. Dini 1878 yılında yayınladığı çalışmasında düzgün yakınsaklığa karar verebilen bir teorem ispatladı.

Teorem 2.3.1 (Dini Teoremi) K, $\mathbb{R}$ nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $(f_n : K \longrightarrow \mathbb{R})_n$, sürekli bir fonksiyona noktasal yakınsayan sürekli fonksiyonların bir dizisi olmak üzere, $\forall x \in K$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ oluyorsa, yani azalarak yakınsıyorsa, o zaman dizinin yakınsaklığı düzgündür (Feldman, 2016).

İspat: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $g_n : K \longrightarrow \mathbb{R}$ öyle ki $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ olacak şekilde $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisini tanımlayalım. Limit fonksiyonun ve her $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonunun sürekli oluşundan $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sürekli fonksiyon dizisi olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ özelliğinden $0 \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ ve $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ noktasal yakınsaklığı yazılır. $M_n = sup\{|g_n(x) - 0| = g_n(x) : x \in K\}$ reel dizisini tanımlayalım. Göstermek istenilen $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ olduğudur.

Verilen $\varepsilon > 0$ için $\mathcal{O}_n = \{x \in K : g_n(x) < \varepsilon\} = {g_n}^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ küme dizisini tanımlayalım. g_n fonksiyonu sürekli olduğundan $\mathcal{O}_n$ kümesi açıktır. Ayrıca $0 \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ oluşundan $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}_{n+1}$ olur.

Her bir $x \in K$ için $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ oluşundan $g_{n_x}(x) < \mathcal{E}$ ve $x \in \mathcal{O}_{n_x}$ olacak şekilde en az bir $n_x \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ eşitliği elde edilir. K kümesinin kompakt oluşundan $\{\mathcal{O}_n\}$ açık örtüsünün sonlu alt örtüsü mevcut olmalı. Bulunan bu ifadeden ve $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}_{n+1}$ özelliğinden $\mathcal{O}_N = K$ eşitliğini sağlayacak şekilde en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $x \in K$ için $g_N(x) < \mathcal{E}$ eşitsizliği elde edilir ve $0 \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ oluşundan $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ istenilen sonucuna ulaşılır. ■

Dini teoremi için;

i. K alt kümesinin kompakt oluşu
ii. Limit fonksiyonunun ve f_n lerin sürekli oluşu
iii. $\forall x \in K$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ oluşu

hipotezleri gereklidir. Eğer birisinden feragat edersek yakınsaklığın düzgün olmadığı örnekle karşılaşabiliriz: (Feldman, 2016)

i. $K = (0,1)$ olmak üzere $f_n(x) = x^n$ sürekli fonksiyon dizisini ele alalım. Limit fonksiyonu sıfır fonksiyonu olup sürekli ve $\forall x \in K$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ özelliğini sağlar ama yakınsaklık düzgün değildir. Çünkü $sup\{x^n : x \in (0,1)\} = 1$ dir.
ii. $K = [0,1]$ olmak üzere $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & x < 1/n \\ 0, & x \geq 1/n \end{cases}$ sürekli fonksiyon dizisini tanımlayacak olursak $\forall x \in K$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ özelliği sağlanır ve limit fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 1 \geq x > 0 \end{cases}$ süreksiz olacaktır. Bu durum yakınsaklığın düzgün olmamasından kaynaklanır. Çünkü $sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in K\} = 1$ dir.
iii. Örnek 2.4.2'deki durum incelenebilir.

2.4. "Convergenza Uniforme a Tratti" Arzela Yakınsaklığı

(f_n) fonksiyon dizisi, I aralığı üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsasın ve her bir f_n fonksiyonu $c \in I$ noktasında sürekli olsun. Soru şu ki limit fonksiyonu c noktasında sürekli midir? Cevabın hayır olduğu Abel tarafından 1826 yılında verilmiştir. Daha basit bir örnek inceleyecek olursak;

Örnek 2.4.1

$f_n: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon dizisini $f_n(x) = x^n$ şeklinde tanımlayacak olursak:

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonunun sürekli olduğunu ve $\forall x \in [0,1]$ için

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}$ noktasal yakınsaklığı mevcut olup limit fonksiyonunun süreksiz olduğu görülür.

Düzgün yakınsaklığın sürekliliği koruduğunu bildiğimizden Örnek 2.4.1'deki yakınsaklık düzgün olamaz. Bu durumu göstermek için $f_n \rightrightarrows f$ düzgün yakınsadığını kabul edelim. O halde, düzgün yakınsaklık tanımından $1/2 > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ var ki $\forall n \geq N$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $|f_n(x) - f(x)| < 1/2$ yazılır. Buradan,

$\forall x \in [0,1)$ için $|f_N(x) - f(x)| = |x^N - 0| = x^N < 1/2$ elde edilir. Bu ise mümkün olamaz; çünkü $\lim_{x\to 1^-} x^N = 1$ olduğundan $\forall x \in [0,1)$ için $x^N < 1/2$ ifadesi yanlıştır. O halde yakınsaklığımız düzgün değildir.

Örnek 2.4.1'deki limit fonksiyonunun sadece $x = 1$ noktasında süreksiz olduğu görülüyor. Fakat bir kere görünen kötü bir davranış, genişletilebilir.

Örneğin, $f_n(x) = Cos^{2n}(4\pi x)$ fonksiyon dizisi [0,1] aralığında tanımlansın.

$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $x \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ noktalarında 1 değerine, diğer noktalarda 0 değerine yakınsayacaktır. Yani f_n sürekli fonksiyon dizisinin limit fonksiyonu beş noktada süreksiz oldu. Durumu daha da kötüleştirebiliriz. Eğer

fonksiyon dizimizi $f_n(x) = Cos^{2n}(1000!\,\pi x)$ şeklinde alırsak limit fonksiyonumuz $1000!$ değerinin pozitif tam bölen sayısı kadar noktada süreksiz olacaktır. Bu durumu ölçüm teorisinden gelen bazı fikir ve başka teknikler sayesinde sürekli fonksiyonlar dizisinin noktasal limit fonksiyonu sonsuz tane, hatta sayılamaz çoklukta süreksiz olduğu noktalar olabilir (Gordon, 1998).

Diğer bir yandan, sürekli fonksiyonlar dizisinin noktasal limit fonksiyonu sürekli olduğu noktalar var olmak zorundadır. Yani, her noktada süreksiz bir fonksiyona sürekli fonksiyon dizisi ile yakınsanamaz.

O halde, sürekli bir fonksiyon dizisinin süreklilik özelliğini limit fonksiyonuna aktarabilmesi için noktasal yakınsaklıktan fazlası gerekmektedir. Yeterlilik şartı için düzgün yakınsaklık kavramını söyleyebiliriz. Çünkü (f_n) sürekli fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonunun sürekli olduğunu ispat etmiştik (Teorem 2.2.2). Peki, (f_n) sürekli fonksiyonlar dizisinin yakınsadığı f fonksiyonu sürekli ise bu yakınsaklık düzgün müdür? Bu sorunun cevabı da hayır!

Örnek 2.4.2

$f_n: [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon dizisini $f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0, 1/n] \\ 2 - nx, & x \in (1/n\,, 2/n] \\ 0, & x \in (2/n\,, 2] \end{cases}$

şeklinde tanımlayalım. $\forall x \in [0,2]$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olduğu görülür. Acaba bu yakınsaklık düzgün mü?

Düzgün olduğunu kabul edelim. Tanım gereğince $1/2 > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ var ki $\forall n \geq N$ ve $\forall x \in [0,2]$ için $|f_n(x) - f(x)| < 1/2$ ifadesi yazılır.
Böylece, $\forall x \in [0,2]$ için

$$|f_N(x) - f(x)| = f_N(x) = \begin{cases} Nx, & x \in [0, 1/N] \\ 2 - Nx, & x \in (1/N\,, 2/N] < 1/2 \\ 0, & x \in (2/N\,, 2] \end{cases}$$

$x = 1/N \in [0,2]$ için $f_N(1/N) = 1 \not< 1/2$ olduğundan düzgün yakınsaklık mevcut değildir.

Bu örnek vasıtasıyla görülür ki (f_n) sürekli fonksiyonların noktasal yakınsadığı f fonksiyonu sürekli ama yakınsaklık düzgün değildir. Diğer bir söyleyişle yakınsaklığın düzgün olmadığı durumda da limit fonksiyonu sürekli olabilir.

Arzela, sürekli fonksiyonlar dizisinin limit fonksiyonunu sürekli kılan minimum koşulu araştırmıştır ve bu durum için 1883 yılında gerek ve yeter koşulu kapalı aralıklar üzerinde tanımlı fonksiyon dizileri için vermiştir. Bu yakınsaklık durumunu "Convergenza Uniforme a Tratti" olarak adlandırdı.

Tanım 2.4.3 $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon dizisi ve $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

i. Her $x \in [a, b]$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
ii. Her $\mathcal{E} > 0$ ve her $n_0 \in \mathbb{N}$ için sonlu sayıda $n_1, \dots, n_t \geq n_0$ değerleri ve içlerinin birleşimi $[a, b]$ aralığının bir örtüsü olan $S_{n_1}, \dots, S_{n_t}$ kapalı aralıkları mevcut olup her $x \in S_{n_i}$ için $\left|f_{n_i}(x) - f(x)\right| < \mathcal{E}$ eşitsizliği sağlanır

koşulları gerçekleşiyor ise f_n fonksiyon dizisi $[a, b]$ aralığı üzerinde f fonksiyonuna "quasi-uniformly by segments (a tratti)" olacak şekilde yakınsıyor denir (Caserta, 2010).

Şimdi bu tanımın güzelliklerini ve niçin bu şekilde tanımlanması gerektiğini inceleyelim. Amacımız sürekli fonksiyon dizilerinin limit fonksiyonunun sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşulu bulmaktı. Düzgün yakınsaklık kavramı limit fonksiyonunun sürekliliği için yeter koşul olduğunu *Teorem 2.2.2* de ispatladık. Ama daha sonra *Örnek 2.4.2* de gördük ki düzgün yakınsaklık gerek koşul değil. *Teorem 2.2.2'*nin ispatına bakacak olursak f fonksiyonun $c \in A$ noktasında sürekli oluşunu

$$|f(x) - f(c)| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{i} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(c)|}_{ii} + \underbrace{|f_N(c) - f(c)|}_{iii}$$

şeklinde ele aldık.

$iii.$ kısım f_n fonksiyon dizilerinin $c \in A$ 'da noktasal yakınsak oluşundan istenildiği kadar küçük yapılacak şekilde N doğal sayısı bulunabilir.

$ii.$ kısım f_N fonksiyonunun $c \in A$ 'da sürekli oluşundan c noktasının δ komşuluğundaki x'ler için istenildiği kadar küçük yapılabilir.

$i.$ kısım gerek şart için sıkıntı yaratan bölüm olmakta. Düzgün yakınsaklıkta $i.$ kısmı tüm A kümesi üzerinde istenildiği kadar küçük yapan bir doğal sayı bulabiliyoruz. Bu limit fonksiyonunu sürekli yapmaktan çok daha ağır bir koşuldur. Şimdi quasi-uniform yakınsaklık kavramını tanımlayıp, aslında bu tanımın kapalı aralık üzerinde *Tanım 2.4.3'*e denk olduğunu gösterelim.

Tanım 2.4.4 (f_n) reel değerli fonksiyon dizi I aralığı üzerinde $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna noktasal yakınsasın. (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $c \in I$ noktasında quasi-uniform yakınsak denir ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ ve her $K \in \mathbb{N}$ için $\delta > 0$ ve $m \geq K$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ değerleri var ki $|x - c| < \delta$ iken $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ koşulu sağlanmalıdır (Gordon, 1998).

Önerme: $I = [a, b]$ olmak üzere *Tanım 2.4.3* ve *Tanım 2.4.4* denktir.

İspat: *Tanım 2.4.3* $\Rightarrow$ *Tanım 2.4.4*

$c \in [a, b]$ olsun. Hipotez gereğince verilen $\varepsilon > 0$ ve $K \in \mathbb{N}$ değerleri için sonlu sayıda $n_1, \dots, n_t \geq K$ doğal sayı değerleri ve $S_{n_1}, \dots, S_{n_t}$ kapalı aralıklar olup içlerinin birleşimleri $[a, b]$ aralığının örtüsü olacak şekilde mevcut olup $\forall x \in S_{n_i}$ için $\left|f_{n_i}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ eşitsizliği en az bir $1 \leq i \leq t$ için sağlanır.

$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{t} S_{n_i}^{o}$ ve $S_{n_i}^{o} \coloneqq S_{n_i}$ 'nin içi olduğundan $c \in S_{n_i}^{o}$ olacak şekilde $\exists i \leq t$ mevcut. $S_{n_i}^{o}$ açık küme olduğundan

$\delta > 0$ ve $n_i \geq K$ değeri var ki $(c - \delta, c + \delta) \subset S_{n_i}^{o}$ olup hipotezden $|x - c| < \delta$ iken $\left|f_{n_i}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ eşitsizliği yazılır.

Böylece $I = [a, b]$ olmak üzere "quasi-uniformly by segments" yakınsaklığı mevcut ise aynı zamanda I aralığının her noktasında "quasi-uniform" yakınsaktır denir.

Tanım 2.4.4 $\Rightarrow$ *Tanım 2.4.3*

$c \in [a, b]$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ değerleri için hipotezden $\exists \delta_c > 0$ ve $\exists m_c \geq n_0, m_c \in \mathbb{N}$ değerleri var ki $|x - c| < \delta_c$ iken $\left|f_{m_c}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ yazılır.

$\forall c \in [a, b]$ için $\delta_c > 0$ ve $m_c \in \mathbb{N}$ değerleri olduğundan

$[a, b] \subseteq \bigcup_{c \in [a,b]} (c - \delta_c, c + \delta_c)$ açık örtüsü oluşturulur.

$[a, b]$ aralığı Heine-Borel Teoreminden kompakt küme olduğundan $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} (c_i - \delta_{c_i}, c_i + \delta_{c_i})$ olacak şekilde sonlu $\{(c_i - \delta_{c_i}, c_i + \delta_{c_i})\}_{i=1}^{t}$ alt örtüsü

vardır. $S^o_{m_i} = (c_i - \delta_{c_i}, c_i + \delta_{c_i})$ seçilirse $m_{c_1}, \dots, m_{c_t} \geq n_0$ doğal sayıları var ki $\forall x \in S^o_{m_{c_t}}$ için $\left|f_{m_{c_t}}(x) - f(x)\right| < \mathcal{E}$ eşitsizliği sağlanır.

$S^o_{m_i}$ lerin birleşimi $[a, b]$ için bir açık örtü ve $[a, b]$ nin kapalı olmasından ötürü $S^o_{m_i}$ lerin kapalı alt aralık kümesi var ki içleri $[a, b]$ için bir örtü oluşturup istenilen koşulu sağlar.

O halde $I = [a, b]$ olmak üzere $\forall c \in I$ noktasında "quasi-uniform" yakınsaklığı mevcut ise aynı zaman da "quasi-uniformly by segments" yakınsaklığının mevcut olduğu görülür.

Teorem 2.4.5 (f_n) fonksiyon dizisi, I aralığı üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsasın ve $c \in I$ noktasında f_n fonksiyonları sürekli olsun.
$c \in I$ noktasında (f_n) dizisi f fonksiyonuna quasi-uniform yakınsak olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun c noktasında sürekli olmasıdır. (Gordon, 1998).

İspat: (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna c noktasında quasi-uniform yakınsak olsun. $\mathcal{E} > 0$ verilsin.

i. (f_n) fonksiyon dizisi $x = c$ 'de noktasal yakınsak olduğundan $\mathcal{E}/3 > 0$ için en az bir $K \in \mathbb{N}$ sayısı var ki $\forall n > K$ için $|f_n(c) - f(c)| < \mathcal{E}/3$ yazılır.
ii. (f_n) dizisi c noktasında quasi-uniform yakınsak olduğundan $\mathcal{E}/3 > 0$ ve $K > 0$ değerleri için $\exists \delta' > 0$ sayısı ve $m \geq K$ doğal sayısı var ki $|x - c| < \delta'$ iken $|f_m(x) - f(x)| < \mathcal{E}/3$ yazılır.

iii. f_m fonksiyonunun c noktasında sürekli oluşundan $\mathcal{E}/3 > 0$ için $\delta'' > 0$ değeri var ki $|x-c| < \delta''$ iken $|f_m(x) - f_m(c)| < \mathcal{E}/3$ eşitsizliği sağlanır.

Böylece $\delta = min\{\delta', \delta''\}$ seçilirse $|x-c| < \delta$ iken

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(c)| + |f_m(c) - f(c)|$$
$$< \mathcal{E}/3 + \mathcal{E}/3 + \mathcal{E}/3 = \mathcal{E}$$

eşitsizliği sağlandığından f fonksiyonu c noktasında sürekli olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi diğer yönü ispat edelim.

f fonksiyonu c noktasında sürekli olsun. $\mathcal{E} > 0$ ve $K \in \mathbb{N}$ verilsin.

i. f fonksiyonu c noktasında sürekli olduğundan $\mathcal{E}/3 > 0$ için $\exists \delta' > 0$ değeri var ki $|x-c| < \delta'$ iken $|f(x) - f(c)| < \mathcal{E}/3$

ii. (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsak olduğundan $x = c$ noktasında $\mathcal{E}/3 > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ var ki $\forall n > N$ için $|f_n(c) - f(c)| < \mathcal{E}/3$ eşitsizliği elde edilir.
$m = maks\{K, N\}$ şeklinde seçelim.

iii. f_m fonksiyonunun c noktasında sürekli oluşundan $\mathcal{E}/3 > 0$ için $\delta'' > 0$ değeri var ki $|x-c| < \delta''$ iken $|f_m(x) - f_m(c)| < \mathcal{E}/3$ eşitsizliği yazılır.

Böylece $m \geq K$ ve $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ değerleri var ki $|x-c| < \delta$ iken

$$|f_m(x) - f(x)| \leq |f_m(x) - f_m(c)| + |f_m(c) - f(c)| + |f(x) - f(c)|$$
$$< \mathcal{E}/3 + \mathcal{E}/3 + \mathcal{E}/3 = \mathcal{E}$$

eşitsizliği sağlandığından (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $c \in I$ noktasından quasi-uniform yakınsak olduğu ispatlanmış olur. ■

Quasi-uniformly by segments ve noktadaki quasi-uniform yakınsaklık tanımını ele aldıktan sonra quasi-uniform yakınsaklık tanımını ele alalım.

Tanım 2.4.6 X topolojik uzayı ve $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sürekli fonksiyonlar dizisi verilsin. Eğer,

i. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ noktasal yakınsaklığı $\forall x \in X$ için sağlanmalı

ii. $\forall \mathcal{E} > 0$ ve $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ için sonlu sayıda $n_1, \dots, n_k \geq n_0$ doğal sayı değerleri var ki her bir $x \in X$ için $\left|f_{n_i}(x) - f(x)\right| < \mathcal{E}$ eşitsizliği en az bir $i \leq k$ için sağlanmalı

koşullarını sağlayan $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu mevcut ise $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi f fonksiyonuna X üzerinde "quasi-uniform" veya Arzela yakınsaktır denir (Caserta, 2011).

Alexandroff, 1948 yılındaki çalışmasında topolojik uzaylar üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyon dizisi için yeni bir yakınsaklık kavramı tanımladı. Caserta, A. ve arkadaşları bu tanımı topolojik uzaydan metrik uzaya tanımlı fonksiyonlar için Alexandroff'un yakınsaklık kavramı aşağıdaki şekilde ele almışlardır.

Tanım 2.4.7 X bir topolojik uzay ve (Y, ρ) metrik uzay olmak üzere $f_n : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyon dizisi ve $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer, her $\mathcal{E} > 0$ ve n_0 tam sayısı için X in öyle bir sayılabilir açık örtüsü $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \dots\}$ ve (n_k) pozitif tam sayı terimli olup n_0 dan büyük olacak şekilde dizisi bulunabilir öyle ki, her $x \in \Gamma_k$ için $\rho\left(f_{n_k}(x), f(x)\right) < \mathcal{E}$ eşitsizliği sağlanıyor ise (f_n) fonksiyon dizisi X üzerinde Alexandroff yakınsaktır denir (Caserta, 2010).

Teorem 2.4.8 (Alexandroff) X bir topolojik uzay ve (Y,ρ) metrik uzay olmak üzere $f_n : X \longrightarrow Y$ olacak şekilde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sürekli fonksiyon dizisi, $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olsun. O halde aşağıdakiler denktir (Caserta, 2010).

i. f fonksiyonu sürekli
ii. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna Alexandroff yakınsaktır

2.5. Arzela Yakınsaklığının Ağlar ile Genellemesi

Tanım 2.5.1 $\mathfrak{D}$ kümesi üzerinde $\geq$ bağıntısı

i. $\forall m \in \mathfrak{D}$ için $m \geq m$ (yansıma)
ii. $m,n,p \in \mathfrak{D}$ için $m \geq n$ ve $n \geq p$ iken $m \geq p$ (geçişme)
iii. $m,n \in \mathfrak{D}$ ise $\exists \alpha \in \mathfrak{D}$ var ki $\alpha \geq m$ ve $\alpha \geq n$

özelliklerini sağlıyor ise $\geq$ bağıntısı $\mathfrak{D}$ kümesini yönlendirir denir. $\geq$ bağıntısı $\mathfrak{D}$ kümesini yönlendiriyor ise $(\mathfrak{D},\geq)$ ikilisine yönlendirilmiş küme denir (Kelley, 1950).

Örnek 2.5.2 $M = \{A \subset \mathbb{Z} : A \text{ kümesi sonlu}\}$ ailesi üzerinde $\subseteq$ bağıntısı M yi yönlendirir ve $(M,\subseteq)$ ikilisi yönlendirilmiş küme olur.

Tanım 2.5.3 X topolojik uzayı ve $(\mathfrak{D},\geq)$ yönlendirilmiş kümesi verilsin. $\mathfrak{D}$ kümesinden X topolojik uzayına tanımlanan her fonksiyon X topolojik uzayı üzerinde bir ağ (net) olarak adlandırılır ve $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ şeklinde gösterilir. (Vermeeren, 2010)

Ağ (net) veya Moore-Smith dizisi, normal dizi kavramının genelleştirilmiş halidir. Diziler, topolojik uzaylar arasındaki fonksiyonlar hakkında tüm bilgileri kodlayamazlar. Örneğin aşağıdaki iki koşul her zaman birbirine denk değildir:
X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu için

i. f (topolojik anlamda) süreklidir
ii. $x \in X$ ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ için $x_n \longrightarrow x$ iken $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

$f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ise dizisel sürekli olma durumu her zaman geçerlidir. Ama her zaman dizisel sürekli ise süreklidir ifadesini kullanamayız. Yani dizisel sürekli olup sürekli olmayan fonksiyon mevcuttur. (Vermeeren, 2010)
Ağ (net) kavramının oluşturulma amacı E. Moore ve H. Smith 1922 yılında keyfi X ve Y topolojik uzayları arasında tanımlanan fonksiyonun süreklilik ve dizisel süreklilik tanımlarının denk kılma çabası sonucunda ortaya çıkmıştır. Süreklilik ve dizisel sürekliliğin denk olamayışının sebebi dizi tanımının yetersizliğiydi. Bu nedenle dizi tanımını genelleyip ağ kavramını oluşturdu. Bu kavram, sayılabilir tam sıralı küme üzerinde tanımlamak yerine keyfi yönlendirilmiş küme üzerinde tanımladı. Böylece süreklilik ve ağların dizisel sürekliliği denk kavramlar haline geldi. Özetle; dizi kavramı iki topolojik uzay arasındaki fonksiyon hakkında bilgiyi kodlamakta yetersiz iken ağ (net) kavramı daha çok bilgiyi kodlayabiliyor. Çünkü topolojik uzaylardaki açık kümelerin ailesi davranış bakımından yönlendirilmiş kümeler gibidir.

Örnek 2.5.4 X topolojik uzayı ve $x \in X$ keyfi noktası için x'i içeren tüm komşulukların ailesi N_x ile gösterilsin.
N_x üzerinde $S, T \in N_x$ için $S \geq T \Leftrightarrow S \subseteq T$ bağıntısını tanımlarsak $(N_x, \geq)$ ikilisi yönlendirilmiş küme olur.

$S \in N_x$ için x_S, S de bir nokta olsun. O halde $(x_S)_{S \in N_x}$ şeklinde ağ tanımlanabilir. Tanımlanış itibariyle x_S'lerin x elemanına bir yaklaşımı mevcut. Bu durum limit kavramını tanımlamaya itiyor.

Tanım 2.5.5 X topolojik uzayı olmak üzere $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{D}} \subset X$ ağı verilsin.
$y \in X$ olmak üzere y'nin her U komşuluğu için $\exists d \in \mathfrak{D}$ var ki $\forall \alpha \geq d$ için $x_\alpha \in U$ oluyor ise $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{D}}$ ağı y noktasına yakınsıyor denir ve $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{D}} \longrightarrow y$ ile gösterilir (Vermeeren, 2010).

Ağ kavramı ve yakınsaklığı için gerekli bilgileri edindikten sonra artık R. Bartle'ın 1955 yılında yayınladığı çalışmasındaki ağ (net) kavramının Arzela yakınsaklığına uygulanma durumunu inceleyelim.

Tanım 2.5.6 X kümesi ve $f_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ olacak şekil $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{D}}$ fonksiyon ağı verilsin. Eğer her $\mathcal{E} > 0$ için $\exists\ \alpha_0 = \alpha_0(\mathcal{E}) \in \mathfrak{D}$ var ki $\forall \alpha \geq \alpha_0$ için $|f_\alpha(x) - f_0(x)| < \mathcal{E}$ eşitsizliğini $\forall x \in X$ için sağlayan f_0 fonksiyonu mevcut ise $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{D}}$ ağı f_0 fonksiyonuna X üzerinde düzgün yakınsar denir ve $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{D}} \rightrightarrows f_0$ şeklinde gösterilir (Bartle, 1955).

Tanım 2.5.7 X kümesi ve $f_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ olacak şekil $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{D}}$ fonksiyon ağı verilsin. Eğer,

i. $\forall x \in X$ için $(f_\alpha(x))_{\alpha \in \mathfrak{D}} \longrightarrow f_0(x)$ yakınsaklığı mevcut
ii. Verilen her $\mathcal{E} > 0$ ve $\alpha_0 \in \mathfrak{D}$ elemanına karşılık sonlu tane $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq \alpha_0$ elemanı bulunabilir öyle ki her bir $x \in X$ için $|f_{\alpha_i}(x) - f_0(x)| < \mathcal{E}$ eşitsizliği en az bir $i = 1, \dots, n$ için sağlanır

koşullarını sağlayan f_0 fonksiyonu mevcut ise $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ ağı f_0 fonksiyonuna X üzerinde quasi-uniform yakınsaktır denir (Bartle, 1955).

Önerme 2.5.8 Eğer bir fonksiyon ağı X üzerinde düzgün yakınsak ise fonksiyon ağının her alt ağı X üzerinde düzgün yakınsaktır (Bartle, 1955).

Önerme 2.5.9 X kümesi üzerinde $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ yakınsak bir fonksiyon ağı olsun. Eğer $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ ağının X üzerinde quasi-uniform yakınsak alt ağı mevcut ise $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ ağı X üzerinde quasi-uniform yakınsaktır. (Bartle, 1955)

Not: X kümesi üzerinde $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ bir fonksiyon ağı olsun. $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ ağının düzgün yakınsak alt ağı olması $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ ağının düzgün yakınsayacağı anlamına gelmez.

Teorem 2.5.10 (Arzela) X topolojik uzayı üzerinde tanımlı $(f_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R})_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ sürekli fonksiyonların bir ağı verilsin.
Eğer $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ sürekli fonksiyonların bir ağı X üzerinde sürekli bir fonksiyona yakınsıyor ise bu yakınsaklık X'in her kompakt alt kümesi üzerinde quasi-uniform dur. Tersine, $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ sürekli fonksiyonların bir ağı X'in bir alt kümesinde quasi-uniform yakınsak ise limit fonksiyonu bu alt küme üzerinde süreklidir (Bartle, 1955).

İspat: f_0 fonksiyonu, $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{D}}$ sürekli fonksiyonların bir ağının X topolojik uzayı üzerinde limit fonksiyonu olsun. Göstermemiz gereken bu yakınsaklığın quasi-uniform olduğudur.
$\mathcal{E} > 0$ ve $\alpha_0 \in \mathfrak{D}$ elemanı verilsin. Keyfi $y \in X$ için $(f_\alpha(y))_{\alpha\in\mathfrak{D}} \longrightarrow f_0(y)$ olduğundan $\mathcal{E} > 0$ için $\exists d \in \mathfrak{D}$ var ki $\forall \alpha \geq d$ için $|f_\alpha(y) - f_0(y)| < \mathcal{E}$ olur. $d, \alpha_0 \in \mathfrak{D}$ ve $\mathfrak{D}$ yönlendirilmiş küme olduğundan $\alpha(y) \in \mathfrak{D}$ var ki $\alpha(y) \geq$

d, α_0 durumu sağlanır. Buradan $\left|f_{\alpha(y)}(y) - f_0(y)\right| < \mathcal{E}$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. O halde $N(y) = \{x \in X : \left|f_{\alpha(y)}(x) - f_0(x)\right| < \mathcal{E}\}$ kümesini tanımlarsak $y \in N(y)$ olduğundan $N(y)$ kümesinin boştan farklı olduğu görülür. $f_{\alpha(y)}$ ve f_0 fonksiyonları sürekli olduğundan $N(y)$ kümesi y noktasını içeren açık bir kümedir.

$C \subset X$ keyfi kompakt alt kümesi verilsin. $C \subset \bigcup_{y \in C} N(y)$ açık örtüsü olduğundan C'nin kompakt olmasından ötürü sonlu alt örtüsü mevcut olmalı;

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(y_i) \ , \ y_i \in C$$

Buradan $\alpha(y_i), i = 1,2, \dots, n$ elemanları için quasi-uniform yakınsaklığının sağlandığı görülür.

Tersine, $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{D}}$ sürekli fonksiyonların bir ağı $B \subset X$ alt kümesi üzerinde f_0 fonksiyonuna quasi-uniform yakınsak olsun. Göstermemiz gereken f_0 fonksiyonunun $B \subset X$ alt kümesi üzerinde sürekli olduğudur.

Keyfi $x_0 \in B$ noktası ve $\mathcal{E} > 0$ değeri verilsin. $(f_\alpha(x_0))_{\alpha \in \mathfrak{D}} \longrightarrow f_0(x_0)$ yakınsaklığı mevcut olduğundan $\mathcal{E}/3 > 0$ için $\exists \alpha_0 \in \mathfrak{D}$ var ki $\forall \alpha \geq \alpha_0$ için $|f_\alpha(x_0) - f_0(x_0)| < \mathcal{E}/3$ olur. B üzerinde yakınsaklık quasi-uniform olduğundan $\mathcal{E}/3 > 0$ ve $\alpha_0 \in \mathfrak{D}$ için $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq \alpha_0$ elemanı bulunabilir öyle ki her bir $x \in B$ için $\left|f_{\alpha_i}(x) - f_0(x)\right| < \mathcal{E}/3$ eşitsizliği en az bir $i = 1, \dots, n$ için sağlanır. $N_i = \{x \in B : \left|f_{\alpha_i}(x) - f_{\alpha_i}(x_0)\right| < \mathcal{E}/3\}$ kümesini tanımlarsak N_i 'nin B 'de açık olduğu ve her bir $i = 1, \dots, n$ için $x_0 \in N_i$ olduğundan $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$ kümesinin x_0 elemanını içeren B 'de açık bir küme olduğu görülür.

Şimdi keyfi bir $x \in N$ için quasi-uniform yakınsaklıktan uygun $i = 1, \dots, n$ değeri için

$$|f_0(x) - f_0(x_0)|$$
$$\leq |f_0(x) - f_{\alpha_i}(x)| + |f_{\alpha_i}(x) - f_{\alpha_i}(x_0)| + |f_{\alpha_i}(x_0) - f_0(x_0)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

yazılabileceğinden f_0 fonksiyonunun $x_0 \in B$ noktasında sürekli olduğu görülür.■

Sonuç: Kompakt topolojik uzay üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlarının bir ağının limit fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak yakınsaklık quasi-uniform dur.

3. YOĞUNLUK VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK KAVRAMI

Reel terimli bir dizi için istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1951 yılında H. Fast ve H. Steinhaus tarafından verildi. Fakat, istatistiksel yakınsaklık kavramı fikri, hemen hemen yakınsaklık (almost convergence) adı altından A. Zygmund tarafından Trigonometric Series kitabının birinci basımında (Warsaw, 1935) oluşturulmuştur.

İstatistiksel yakınsaklık kavramını ele almadan önce asimptotik yoğunluk fonksiyonunu incelememiz gerekir.

3.1. Doğal Sayılar Kümesinde Yoğunluk Fonksiyonu

Tanım 3.1.1 $\underline{\delta}: \mathrm{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$, doğal sayıların kuvvet kümesinden $[0,1]$ aralığına tanımlı fonksiyonu aşağıdaki dört aksiyomu sağlıyor ise alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu olarak adlandırılır (Freedman, 1981).

D.1) $A \sim B$ ise $\underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$ $\quad (A \sim B \iff A \Delta B$ kümesi sonlu elemanlı)

D.2) $A \cap B = \emptyset$ ise $\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq \underline{\delta}(A \cup B)$

D.3) $A, B \subseteq \mathbb{N}$ için $\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq 1 + \underline{\delta}(A \cap B)$

D.4) $\underline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$

$\underline{\delta}$ herhangi bir alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu olmak üzere $\overline{\delta}$ üst asimptotik yoğunluk fonksiyonu, $A \subseteq \mathbb{N}$ keyfi alt kümesi için $\overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} \backslash A)$ şeklinde tanımlanır (Freedman, 1981).

$\underline{\delta}$ alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu ile $\overline{\delta}$ üst asimptotik yoğunluk fonksiyonu arasındaki ilişki aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 3.1.2 $\underline{\delta}$ alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu ve $\overline{\delta}$ üst asimptotik yoğunluk fonksiyonu olmak üzere keyfi $A, B \subseteq \mathbb{N}$ kümeleri için

i. $A \subseteq B$ ise $\underline{\delta}(A) \leq \underline{\delta}(B)$

ii. $A \subseteq B$ ise $\overline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}\,(B)$

iii. $A, B \subseteq \mathbb{N}$ altkümeleri için $\overline{\delta}(A) + \overline{\delta}\,(B) \geq \overline{\delta}\,(A \cup B)$

iv. $\underline{\delta}(\emptyset) = \overline{\delta}\,(\emptyset) = 0$

v. $\overline{\delta}\,(\mathbb{N}) = 1$

vi. $A \sim B$ ise $\overline{\delta}(A) = \overline{\delta}\,(B)$

vii. $\underline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}\,(A)$

ifadeleri sağlanır (Freedman, 1981).

İspat:

i) $A, B \subseteq \mathbb{N}$ kümeleri verilsin. $\underline{\delta}$ alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu ve $A \subseteq B$ olduğundan $\underline{\delta}(B) = \underline{\delta}\big(A \cup (B \backslash A)\big) \geq \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B \backslash A)$ yazılır ve $\underline{\delta}(A) \leq \underline{\delta}(B)$ olduğu görülür.

ii) $A \subseteq B$ olsun. Buradan $\mathbb{N} \backslash B \subseteq \mathbb{N} \backslash A$ yazılır ve i. özellikten

$$\underline{\delta}(\mathbb{N} \backslash A) \leq \underline{\delta}(\mathbb{N} \backslash B) \implies \overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} \backslash A) \leq 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} \backslash B) = \overline{\delta}(B)$$

sonucuna ulaşılır.

iii) $A, B \subseteq \mathbb{N}$ alt kümeleri verilsin.

$$\begin{aligned}\overline{\delta}(A \cup B) &= 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} \backslash (A \cup B) = 1 - \underline{\delta}\big((\mathbb{N} \backslash A) \cap (\mathbb{N} \backslash B)\big) \\ &= 2 - [1 + \underline{\delta}\big((\mathbb{N} \backslash A) \cap (\mathbb{N} \backslash B)\big)] \\ &\leq 2 - \big[\underline{\delta}(\mathbb{N} \backslash A) + \underline{\delta}(\mathbb{N} \backslash B)\big] = \overline{\delta}(A) + \overline{\delta}\,(B)\end{aligned}$$

olduğundan $\overline{\delta}\,(A \cup B) \leq \overline{\delta}(A) + \overline{\delta}\,(B)$ sonucuna ulaşılır.

iv) $\emptyset$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri için $\emptyset \cap \mathbb{N} = \emptyset$ olduğundan D.2 özelliğince $\underline{\delta}(\emptyset) + \underline{\delta}(\mathbb{N}) \leq \underline{\delta}(\emptyset \cup \mathbb{N}) = \underline{\delta}(\mathbb{N}) \Rightarrow \underline{\delta}(\emptyset) \leq 0 \Rightarrow \underline{\delta}(\emptyset) = 0$ sonucuna ulaşılır.

$\overline{\delta}(\emptyset) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N}\backslash\emptyset) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N}) = 0$ eşitliği elde edilir.

v) $\overline{\delta}(\mathbb{N}) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}) = 1 - \underline{\delta}(\emptyset) = 1 - 0 = 1$ sonucu elde edilir.

vi) $A \sim B$ olsun. D.1 özelliğinden $\underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$ yazılır ve buradan $\overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(B) = \overline{\delta}(B)$ sonucuna varılır.

vii) $\overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N}\backslash A)$ üst yoğunluk fonksiyonun tanımından yazılır. $\underline{\delta}(\mathbb{N}) = \underline{\delta}\big((\mathbb{N}\backslash A) \cup A\big) \geq \underline{\delta}(\mathbb{N}\backslash A) + \underline{\delta}(A)$ ifadesi D.2 özelliğinden yazılır ve $\underline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$ olduğundan

$\underline{\delta}(\mathbb{N}) - \underline{\delta}(\mathbb{N}\backslash A) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N}\backslash A) = \overline{\delta}(A) \geq \underline{\delta}(A)$ sonucu elde edilir.■

Tanım 3.1.3 $\underline{\delta}$ alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu olmak üzere $A \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi için $\overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A)$ ise A kümesi doğal yoğunluk fonksiyonuna sahiptir ve $\delta(A)$ ile gösterilir. Ayrıca $\underline{\delta}$ ye göre doğal yoğunluğa sahip kümelerin kümesini $\zeta_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N}: \overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A)\}$ şeklinde tanımlayalım (Freedman, 1981).

Önerme 3.1.4 $A \sim \mathbb{N}$ ise $A \in \zeta_\delta$ ve $\delta(A) = 1$ dir.

İspat: $A \sim \mathbb{N}$ ise $\underline{\delta}$ alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu olduğundan $\underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$ olur ve önerme 2.2 den $\overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$ olduğundan $A \in \zeta_\delta$ ve $\delta(A) = 1$ sonucuna ulaşılır. ■

Önerme 3.1.5 (Freedman, 1981)

i. δ yoğunluk fonksiyonu sonlu toplamsaldır. Yani,
$A, B \in \zeta_\delta$ ve $A \cap B = \emptyset$ ise $A \cup B \in \zeta_\delta$ olup
$\delta(A) + \delta(B) = \delta(A \cup B)$ eşitliği sağlanır.

ii. $A \in \zeta_\delta$ ise $(\mathbb{N}\backslash A) \in \zeta_\delta$ ve $\delta(\mathbb{N}\backslash A) = 1 - \delta(A)$

iii. $A \in \zeta_\delta$ ve $A \sim B$ ise $B \in \zeta_\delta$ ve $\delta(A) = \delta(B)$

İspat:

i. $A, B \in \zeta_\delta$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun.
Önerme 2.2'den $\overline{\delta}(A \cup B) \leq \overline{\delta}(A) + \overline{\delta}(B)$ ve $A, B \in \zeta_\delta$ olduğundan D.2 özelliğince $\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq \underline{\delta}(A \cup B)$ eşitsizliği yazılır.
Ayrıca, $\underline{\delta}(A \cup B) \leq \overline{\delta}(A \cup B)$ olduğunu bildiğimizden
$\underline{\delta}(A \cup B) = \overline{\delta}(A \cup B)$ sonucuna ulaşılır ve buradan $A \cup B \in \zeta_\delta$ olduğu söylenir.

$$\delta(A) + \delta(B) = \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq \underline{\delta}(A \cup B) = \delta(A \cup B)$$

$$\delta(A) + \delta(B) = \overline{\delta}(A) + \overline{\delta}(B) \geq \overline{\delta}(A \cup B) = \delta(A \cup B)$$

Yukarıdaki iki eşitsizlikten $\delta(A) + \delta(B) = \delta(A \cup B)$ sonucuna ulaşılır.

ii. $A \in \zeta_\delta$ olsun. O halde $\overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A) = \delta(A)$ eşitliğini biliyoruz ve göstermemiz gereken $\overline{\delta}(\mathbb{N}\backslash A) = \underline{\delta}(\mathbb{N}\backslash A)$ eşitliğidir.
$\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N}\backslash A)$ ve $\overline{\delta}(\mathbb{N}\backslash A) = 1 - \underline{\delta}(A)$ eşitliklerinden $\overline{\delta}(\mathbb{N}\backslash A) = \underline{\delta}(\mathbb{N}\backslash A)$ eşitliğini ve buradan $\mathbb{N}\backslash A \in \zeta_\delta$ sonucuna ulaşırız.
Şimdi $\delta(\mathbb{N}\backslash A) = 1 - \delta(A)$ olduğunu gösterelim.

δ nın sonlu toplamsal özelliğinden $A, \mathbb{N}\backslash A \in \zeta_\delta$ ve $A \cap (\mathbb{N}\backslash A) = \emptyset$ olduğundan $\delta(A) + \delta(\mathbb{N}\backslash A) = \delta(A \cup (\mathbb{N}\backslash A)) = \delta(\mathbb{N}) = 1$ olur ve buradan $\delta(\mathbb{N}\backslash A) = 1 - \delta(A)$ olduğu görülür.

iii. $A \in \zeta_\delta$ ve $A \sim B$ olsun.

$A \sim B$ olduğundan D.1 özelliğinden $\underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$ ve Önerme 2.2'den $\overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B)$ eşitlikleri elde edilir.

Ayrıca, $A \in \zeta_\delta$ olduğundan $\overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A) \Longrightarrow \overline{\delta}(B) = \underline{\delta}(B) \Longrightarrow B \in \zeta_\delta$ sonucuna ulaşılır. ■

Not: δ her zaman sayılabilir toplamsal değildir: Örneğin,

$A_i = \{i\}$ $i \in \mathbb{N}$ küme dizisi için $\delta(A_i) = 0$ ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olmasına rağmen $\delta(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \neq \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta(A_i)$ eşitsizliği mevcuttur.

Diğer bir taraftan, toplamsal özellik olarak adlandırabileceğimiz benzer bir özellik bazı yoğunluk fonksiyonları için geçerlidir. Yoğunluk fonksiyonlarının bu özelliği başka kümeler üzerinde Buck (1946,1953) tarafından çalışılmıştır.

Örnek $\underline{\delta} :$ P($\mathbb{N}$) $\longrightarrow$ [0,1] dönüşümünü $A \in$ P($\mathbb{N}$) için $|A(n)| = |\{k \in A : k \leq n\}|$ n den küçük A kümesinin elemanlarının sayısı olmak üzere

$\underline{\delta}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)|$ şeklinde tanımlarsak D.1-D.4 özelliklerini sağladığından alt asimptotik yoğunluk fonksiyonuna örnek teşkil eder. Çoğu zaman asimptotik yoğunluk fonksiyonu ifadesi kullanılır. (Freedman, 1981)

Şimdi $\underline{\delta}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)|$ alt asimptotik yoğunluk fonksiyonuna farklı bir şekilde ele alalım.

C_1, Cesaro matrisi $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ ve χ_A, $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin karakteristik dizisi olarak tanımlanırsa $C_1.\chi_A$ matris çarpımının n. terimi, $\frac{1}{n}|A(n)|$ olacaktır.

Buradan, $\underline{\delta}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)| = \liminf_{n\to\infty} (C_1.\chi_A)_n$ eşitliğini yazmamız mümkün olur.

Bu örnek gösteriyor ki toplanabilme metodundan bir yoğunluk fonksiyonu elde etmenin genel bir yöntemin olması muhtemeldir. Şimdi negatif olmayan regüler bir matris ile bunu yapmanın doğal bir yolunu gösterelim (Freedman, 1981). Bunu göstermeden önce regüler matris kavramını ve toplanabilmeyi incelememiz gerekli.

3.2. Toplanabilme Metoduyla Yoğunluk Fonksiyonu Elde Etme

X ve Y, l_∞, c, c_0 ve l_p dizi uzaylarından herhangi ikisini temsil etsin. Buradaki her bir küme, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde birer lineer uzay olduğundan her bir $x = (x_k) \in X$ elemanını $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{pmatrix}$ vektörel formda yazabiliriz.

O halde $A = (a_{nk})$ kompleks veya reel terimli sonsuz satır ve sütunlu matris olmak üzere

$$A.x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{1k}.x_k \\ \vdots \\ \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{nk}.x_k \\ \vdots \end{pmatrix} = (A_n(x_k))$$

dizisi elde etmiş oluruz. Bu dizinin anlamlı olabilmesi için $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{nk}.x_k < \infty$ olması gerekir.

Eğer her bir terimi seri toplamı olan $A.x = (A_n(x_k))$ dizisi, Y dizi uzayının bir elemanı ise $A = (a_{nk})$ matrisine X dizi uzayından Y dizi uzayına bir dönüşüm denir.

Tanım 3.2.1 $A = (a_{nk})$ matrisi X dizi uzayından Y dizi uzayına bir dönüşüm olmak üzere $x \in X$ elemanı için $(A_n(x_k))$ dizisi bir L değerine yakınsıyor ise x dizisi, A-toplanabilirdir denir ve $A - \lim x = L$ ile gösterilir.

Burada x dizisi ıraksak olabilir. Örneğin; $(x_k) = \{1,0,1,0, \dots\}$ dizisini ve $A = C_1$ Cesaro matrisini alacak olursak

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2/3 \\ \vdots \end{pmatrix} = (A_n(x_k))$$

$\left(A_n(x_k)\right) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \dots\}$ dizisi elde edip bu dizinin $\frac{1}{2}$ değerine yakınsadığı görülür.

Özetle $(x_k) = \{1,0,1,0, \dots\} \in l_\infty$ sınırlı fakat ıraksak dizisini $A = C_1$ matrisiyle yakınsak bir diziye dönüştürmüş olduk. Amacımız, $x = (x_k) \in X$ verildiğinde, $A(x) \in Y$ olması için A matrisi üzerine konulacak gerek ve yeter koşulları araştırmak.

$(X, Y) = \{A = (a_{nk}) : \forall x = (x_k) \in X$ için $A.x = (A_n(x_k)) \in Y\}$ kümesi, X dizi uzayını Y dizi uzayına götüren bütün matris dönüşümlerin sınıfı olarak gösterilir.

Limiti koruyan matrislerin sınıfı ise $(X, Y; P)$ ile gösterilir.

Özel olarak $X = Y = c$, yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere $A \in (c, c)$ ise A matrisine koruyucu (konservatif) matris ve $A \in (c, c; P)$ ise A matrisine regüler matris denir (Maddox, 1970).

Teorem 3.2.2 (Silverman-Toeplitz)

$A \in (c, c; P)$ regüler matris olabilmesi için gerek ve yeter koşul $A = (a_{nk})$ matrisinin

i. $\text{Sup}_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

ii. $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad (k \in \{1,2, \dots\} \text{ için})$

iii. $\lim \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

özelliklerini sağlamasıdır (Maddox, 1970).

İspat:

($\Longrightarrow$) $A \in (c, c; P)$ olsun.

i. $\text{Sup}_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olduğunu gösterelim.

$x = (x_k) \in c$ olmak üzere $A \in (c, c; P)$ olduğundan $\lim x_k = a$ ise $\lim A_n x = a$ olmalıdır. (Çoğu zaman $A_n(x_k)$ gösteriminin yerine $A_n x$ gösterimi kullanılacak)

$lim A_n x = a$ yakınsaklıktan ötürü her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k < \infty$ ifadesi elde edilir. Keyfi $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k$ alalım. Amaç $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olduğunu göstermek.

Buradan sonra gösterim kolaylığı sağlayacak $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} a_k.x_k$ kısaltmasını kullanalım.

Şimdi $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \to \infty$ olduğunu kabul edelim.

O halde $n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$ artan pozitif tam sayılar dizisi bulunabilir ki

$$\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |a_k| > i$$

eşitliği sağlanır.

$x = (x_k) \in c_0 \subset c$ dizisini $(x_k) = \begin{cases} \frac{Sgna_k}{i} \; ; \; n_i < k \leq n_{i+1} \\ 0 \quad ; \; 1 \leq k \leq n_i \end{cases}$ şeklinde tanımlarsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.x_k = \sum_{k=1}^{n_1} a_k.x_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k.x_k + \cdots + \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} a_k.x_k + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{n_1} a_k.0 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k.\frac{Sgna_k}{1} + \cdots + \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} a_k.\frac{Sgna_k}{i} + \cdots$$

$$= \sum_{k=n_1+1}^{n_2} |a_k| + \sum_{k=n_2+1}^{n_3} |a_k|.\frac{1}{2} + \cdots + \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |a_k|.\frac{1}{i} + \cdots$$

eşitliğini elde ederiz.

$\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |a_k| > i$ eşitsizliği elimizde mevcut olduğunu hatırlayalım. Böylece

$$\frac{1}{i}.\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |a_k| > 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.x_k = \sum_{k=n_1+1}^{n_2} |a_k| + \sum_{k=n_2+1}^{n_3} |a_k|.\frac{1}{2} + \cdots + \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |a_k|.\frac{1}{i} + \cdots > 1 + 1 + \cdots$$

Yazılacağından $\sum_{k=1}^{\infty} a_k.x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k$ ıraksak olur ki $A \in (c, c; P)$ oluşu ile çelişiriz. O halde

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

Buraya kadar $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olduğunu gösterdik. Sıra $\mathrm{Sup}_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olduğunu göstermek.

Bunun için $f_n : c \to \mathbb{C}$ $f_n((x_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k$ dönüşümü $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k < \infty$ oluşundan iyi tanımlıdır.

Şimdi $f_n((x_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k$ fonksiyonunun $f_n \in c^*$, yani dual uzayın bir elemanı olduğunu gösterelim. Bunun için f_n in lineer ve sınırlı olduğunu göstermeliyiz.

Lineerlik, f_n in tanımı gereğince açık.

$\|f_n((x_k))\| = |\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k|$ $\mathbb{C}$ deki standart norm olmak üzere

$$\|f_n((x_k))\| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}.x_k| \leq \|x_k\|.\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$$

$$\|f_n((x_k))\| \leq M_n.\|x_k\|$$

$M_n = \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| < \infty$ olduğundan f_n fonksiyonelin sınırlı olduğunu söyleriz.

O halde $f_n \in c^*$ yazılır.

Bizi sonuca ulaştıracak olan Banach-Steinhaus teoremini hatırlayalım.

Teorem *(Banach-Steinhaus) X bir Banach uzayı ve Y bir Normlu uzay olmak üzere,* $(f_n) : X \to Y$ *sınırlı lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer her* $x \in X$ *için* $Sup\{\|f_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ *ise* $Sup\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ *olacaktır.*

Bizim elimizde $f_n : c \to \mathbb{C}$ $f_n((x_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k$ sınırlı lineer operatörleri mevcut. Aslında f_n fonksiyonelini $f_n((x_k)) = A_n(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k$ şeklinde yazabileceğimizden $A_n : c \to \mathbb{C}$ sınırlı lineer operatörleri mevcut olup

$\lim_{n\to\infty} A_n(x_k) = a$ limitin varlığından $\text{Sup}\{\|A_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ $(\forall (x_k) \in c)$

eşitsizliği yazılır. O halde Banach-Steinhaus teoremince

$$\text{Sup}\{\|A_n\| : n \in \mathbb{N}\} = \text{Sup}\|A_n\| = \text{Sup}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| < \infty$$

İfadesi elde edilir ve i. şık $\text{Sup}_n \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| < \infty$ ispat edilmiş olur.

ii. $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ olduğunu gösterelim.

$A \in (c, c; P)$ olduğundan her $x = (x_k) \in c$ için $\lim x_k = a$ ise $\lim A_n x = a$ olmalıdır.

Özel olarak $x = (x_k) = \{\underbrace{0,0,\dots,0,1,0,\dots}_{sadece\ k.\ terim\ 1}\}$ dizisini ele alırsak $A \in (c,c;P)$ oluşundan $\lim A_n x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k = \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ sonucuna ulaşılır.

iii. $\lim \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ olduğunu gösterelim.

Özel olarak $x = (x_k) = \{1,1,\dots,1,\dots\}$ dizisini ele alırsak $A \in (c,c;P)$ oluşundan $\lim A_n x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ istenilen durum elde edilir.

($\Longleftarrow$) $x = (x_k) \in c$ dizisi ve i, ii, iii koşullarını sağlayan $A = (a_{nk})$ matrisi verilsin. Göstermemiz gereken $\lim x_k = a$ iken $\lim A_n x = a$ oluşu.

$$A_n(x_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k\right)_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.(x_k - a) + a\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\right)_n$$

şeklinde yazabiliriz.

iii. koşuldan $\lim_{n\to\infty} a.\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = a$ eşitliğini elde ederiz.

Sonuca ulaştıracak olan regüler matris dönüşümünün varlık teoremini hatırlamamız gerekiyor.

Teorem *(Regüler matris dönüşümünün varlık teoremi)*
$M = (m_{nk})$ *matrisi olmak üzere,*

i. $lim_{n\to\infty}\, m_{nk} = 0$
ii. $S = Sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |m_{nk}| < \infty$

özellikleri sağlanıyor ise $M \in (c_0, c_0)$ *ve* $\|M\| = S$ *dir.*

Buradan $A \in (c_0, c_0)$ ve $(x_k - a)_k \in c_0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x_k - a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.(x_k - a) = 0$$

eşitliği elde edilir.

Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.(x_k - a) + a \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right) = a$$

ifadesini elde ederek $A \in (c, c; P)$ olduğunu göstermiş oluruz. ■

Regüler matris kavramını incelememizdeki amacı hatırlayalım:

$\underline{\delta} : \mathrm{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$, olmak üzere, $A \in \mathrm{P}(\mathbb{N})$ için $\underline{\delta}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)|$ dönüşümü bir alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu olmaktaydı. Ayrıca, $\underline{\delta}$ dönüşümünü $\underline{\delta}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)| = \liminf_{n\to\infty} (C_1.\chi_A)_n$ (C_1, Cesaro matrisi) şeklinde yazmamız mümkündü. Bu eşitlikteki C_1, Cesaro matrisinin yerine başka ne tür bir matris yazabiliriz ki $\underline{\delta}(A)$ dönüşümü yine alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu olma özelliğini korusun? sorunun cevabını aramaktaydık. Şimdi bu duruma çözüm getirecek önermeyi inceleyelim.

Önerme 3.2.3 M negatif olmayan regüler bir matris ve $\delta_M : \mathrm{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ olmak üzere $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta_M(A) = \liminf_{n\to\infty} (M.\chi_A)_n$ şeklinde tanımlanan δ_M dönüşümü bir alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu olup $\overline{\delta_M}(A) = \limsup_{n\to\infty} (M.\chi_A)_n$ şeklinde olacaktır (Freedman, 1981).

İspat: δ_M dönüşümünün alt asimptotik yoğunluk fonksiyonu olduğunu göstermek için D1-D4 özelliklerini sağladığını göstermemiz gerekir. Üst asimptotik yoğunluk fonksiyonunun tanımı $\overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N}\backslash A)$ şeklinde olduğundan

$\overline{\delta_M}(A) = \limsup_{n\to\infty} (M.\chi_A)_n$ eşitliğini gösterebilmemiz için

$$\overline{\delta_M}(A) = 1 - \delta_M(\mathbb{N}\backslash A) = 1 - \liminf_{n\to\infty} \left(M.\chi_{\mathbb{N}\backslash A}\right)_n = \limsup_{n\to\infty} (M.\chi_A)_n$$

eşitliğini göstermemiz gerekir. Şimdi δ_M dönüşümünün sırasıyla D1-D4 özelliklerini sağladığını gösterelim.

D1) $A\sim B$ ise $\delta_M(A) = \delta_M(B)$ "$A\sim B \iff A\Delta B$ kümesi sonlu elemanlı"

$A, B \subseteq \mathbb{N}$ öyle ki $A\sim B$ olsun. O halde,

$$|(M.\chi_A)_n - (M.\chi_B)_n| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}.\chi_A(j) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}.\chi_B(j)\right|$$

eşitliğini, $A\Delta B$ kümesi sonlu elemanlı olduğundan $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ var ki $\forall j > N_0$ için $\chi_A(j) = \chi_B(j)$ yazılacağından

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}.\chi_A(j) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}.\chi_B(j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{N_0} (a_{nj}.\chi_A(j) - a_{nj}.\chi_B(j))\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N_0} \left|a_{nj}.(\chi_A(j) - \chi_B(j))\right| = \sum_{j=1}^{N_0} a_{nj}.|(\chi_A(j) - \chi_B(j))|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N_0} a_{nj}$$

eşitsizliği elde edilir ve $M = (a_{nj})$ matrisi regüler matris olduğundan Silverman-Toeplitz teoremince $\lim_{n\to\infty} a_{nj} = 0$ (j sabit) eşitliği mevcut olup buradan

$$\sum_{j=1}^{N_0} a_{nj} < \frac{\varepsilon}{N_0} + \cdots + \frac{\varepsilon}{N_0} = \varepsilon$$

ifadesini elde ederiz ve sonuca ulaşmış oluruz;

$$\liminf_{n\to\infty} (M.\chi_A)_n = \liminf_{n\to\infty} (M.\chi_B)_n \Longrightarrow \delta_M(A) = \delta_M(B)$$

D2) $A \cap B = \emptyset$ ise $\delta_M(A) + \delta_M(B) \leq \delta_M(A \cup B)$

$A, B \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $A \cap B = \emptyset$ olsun.

$\delta_M(A \cup B) = \liminf_{n\to\infty} (M.\chi_{A\cup B})_n$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan dolayı $(M.\chi_{A\cup B})_n = (M.\chi_A + M.\chi_B)_n$ olup buradan

$\delta_M(A \cup B) \geq \delta_M(A) + \delta_M(B)$ eşitsizliği elde edilir.

D4) $\delta_M(\mathbb{N}) = 1$

$\delta_M(\mathbb{N}) = \liminf_{n\to\infty} (M.\chi_{\mathbb{N}})_n = \liminf_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}.\chi_{\mathbb{N}}(j)\right)_n$

$= \liminf_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}\right)_n = 1$ eşitliği Silverman-Toeplitz teoreminden yazılır.

D3) koşulunu ispatlamadan önce $\overline{\delta_M}(A) = \limsup_{n\to\infty} (M.\chi_A)_n$ eşitliğini gösterelim.

$A \subseteq \mathbb{N}$ için $\chi_{\mathbb{N}\setminus A} = 1 - X_A$ karakteristik fonksiyonu ve $\bar{1} = \{1,1,1,\ldots\}$ dizisi yardımıyla

$$\overline{\delta_M}(A) = 1 - \delta_M(\mathbb{N}\setminus A) = 1 - \liminf_{n\to\infty} \left(M.\chi_{\mathbb{N}\setminus A}\right)_n$$

$$= 1 + \limsup_{n\to\infty} \left(-M.\chi_{\mathbb{N}\setminus A}\right)_n = \limsup_{n\to\infty} \left(1 - M.\chi_{\mathbb{N}\setminus A}\right)_n$$

$$= \limsup_{n\to\infty}(1-(M.\bar{1}-M.\chi_A))_n$$

$$= \limsup_{n\to\infty}(1-M.\bar{1}+M.\chi_A)_n = \limsup_{n\to\infty}(M.\chi_A)_n$$

eşitliği elde edilir. Çünkü $M \in (c,c:P)$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}(1-M.\bar{1})_n = 0$

D3) $A, B \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta_M(A)+\delta_M(B) \leq 1+\delta_M(A\cap B)$

$\chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cup B}$ karakteristik fonksiyonunca

$$1+\delta_M(A\cap B) = 1+\liminf_{n\to\infty}(M.\chi_{A\cap B})_n$$

$$= 1+\liminf_{n\to\infty}(M.\chi_A + M.\chi_B - M.\chi_{A\cup B})_n$$

$$\geq 1+\liminf_{n\to\infty}(M.\chi_A)_n + \liminf_{n\to\infty}(M.\chi_B)_n - \limsup_{n\to\infty}(M.\chi_{A\cup B})_n$$

$$= 1+\delta_M(A)+\delta_M(B)-\overline{\delta_M}(A\cap B)$$

$$= 1+\delta_M(A)+\delta_M(B)-1+\delta_M(\mathbb{N}(A\cup B))$$

$$\geq \delta_M(A)+\delta_M(B)$$

Sonuç olarak $\delta_M(A)+\delta_M(B) \leq 1+\delta_M(A\cap B)$ eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

■

3.3. Asimptotik Yoğunluk Fonksiyonu ve Bazı Özellikleri

$\underline{d}: \mathrm{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$ dönüşümünü $A \in \mathrm{P}(\mathbb{N})$ için $\underline{d}(\mathrm{A}) = \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}|A(n)|$ şeklinde tanımladığımız takdirde alt asimptotik yoğunluk fonksiyonuna örnek teşkil eder. Önerme 2.2.3'ten $\overline{d}$ üst asimptotik yoğunluk fonksiyonunun $\overline{d}(\mathrm{A}) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}|A(n)|$ şeklinde olduğu sonucuna ulaşırız.

Tanım 3.1.3'ü hatırlayacak olursak, $A \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\underline{d}(\mathrm{A}) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)| = \overline{d}(\mathrm{A})$$

eşitliği sağlanıyor ise $A \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi $\underline{d}$'ye göre doğal yoğunluğa sahip olup doğal yoğunluğu $d(A)$ ile göstermiştik. $A \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesinin $\underline{d}$ dönüşümüne göre doğal yoğunluğa sahip olma durumunu incelersek; $\left(\frac{1}{n}|A(n)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin liminf ve limsup'u eşit olabilmesi için gerek ve yeter koşul limitinin olması gerektiğinden $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|A(n)|$ mevcut ancak ve ancak $d(A) = \overline{d}(\mathrm{A}) = \underline{d}(\mathrm{A})$ eşitliği sağlanır şeklinde yazabiliriz. $\underline{d}$ alt asimptotik yoğunluk fonksiyonuna göre doğal yoğunluğa sahip olan $A \subseteq \mathbb{N}$ alt kümelerin kümesini $D := \zeta_d = \{A \subseteq \mathbb{N}: \underline{d}(\mathrm{A}) = \overline{d}(\mathrm{A})\}$ şeklinde gösterelim.

Doğal yoğunluğa sahip olmayan küme örneği verebiliriz. Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesini

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{2^{2n}, \dots, 2^{2n+1} - 1\}$$

şeklinde oluşturursak

$$\underline{d}(\mathrm{A}) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (2^2) + \cdots + (2^2)^n}{2^{2.(n+1)} - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{d}(\mathrm{A}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (2^2) + \cdots + (2^2)^n}{2^{2n+1} - 1} = \frac{2}{3}$$

elde ederiz ve $\underline{d}(\mathrm{A}) \neq \overline{d}(\mathrm{A})$ olduğundan A kümesi doğal yoğunluğa sahip değildir.

Önerme 3.3.1 $A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots\} \subseteq N$ alt kümesi için

$$\underline{d}(\mathrm{A}) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)| = \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

eşitliği sağlanır ve $\mathrm{A} \in \mathrm{D}$ ise $d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$

İspat: $a_n = m$ olsun. O halde $a_1 < a_2 < \cdots < a_n = m$ yazılır. Buradan

$$\left(\frac{n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{|A(m)|}{m}\right)_{m(n)\in\mathbb{N}} \subseteq \left(\frac{|A(n)|}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

olduğu görülür ve $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)| \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$ eşitsizliği elde edilir.

$n \geq a_1$ keyfi tamsayısı için $a_{m-1} \leq n < a_m$ olacak şeklinde $a_{m-1}, a_m \in$ A elemanları mevcut. Buradan

$$\frac{m}{a_m} - \frac{|A(n)|}{n} = \frac{m}{a_m} - \frac{m-1}{n} < \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{m}{a_m} < \frac{|A(n)|}{n} + \frac{1}{n}$$

eşitsizliğini yazabileceğimizden $\lim_{n\to\infty} inf \frac{n}{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{n}|A(n)|$ ifadesi elde edilir. Böylece

$$\underline{d}(\mathrm{A}) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)| = \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

sonucuna ulaşılır.

Eğer A ∈ D ise $d(A) = \underline{d}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)|$ eşitliğini yazabiliriz. Yukarıdaki durumdan ve

$$\left(\frac{n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \left(\frac{|A(n)|}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

alt dizi oluşundan $d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$ eşitliği elde edilir. ■

Asimptotik yoğunluk fonksiyonu ile ölçü arasındaki ilişkiye bakacak olursak:

$\underline{d}$ ve $\overline{d}$ yoğunlukları bir ölçü değildir. Çünkü öyle $A, B \subseteq \mathbb{N}$ ayrık alt kümeleri oluşturulabilir ki $\underline{d}(A \cup B) \neq \underline{d}(A) + \underline{d}(B)$ ve $\overline{d}(A \cup B) \neq \overline{d}(A) + \overline{d}(B)$ durumları sağlanır. Ayrıca D doğal yoğunluğa sahip kümelerin kümesi σ −Cebiri değildir. Öyle $A, B \in D$ ayrık olmayan kümeleri vardır ki $A \cup B$ veya $A \cap B$, D

sınıfına ait değildir (Niven, 1951). Örneğin, $\Lambda = \{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{N}$ doğal yoğunluğa sahip olmayan bir küme olmak üzere $A = \{a_n = 3n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $B = \{b_n\}$ öyle ki $n \in \Lambda$ iken $b_n = a_n$ ve $n \notin \Lambda$ iken $b_n = 1 + 3n$ şeklinde tanımlayalım. A ve B kümelerinin tanımlanışı gereğince $A, B \in D$ olup $d(A) = d(B) = 1/3$ yoğunluğuna sahiptirler. Fakat, $A \cap B = \{3\lambda_n\}$ kümesi doğal yoğunluğa sahip değildir, çünkü $\Lambda \notin$ D (Buck, 1946).

d yoğunluğunun sayılabilir toplamsallık özelliğini sağlamadığını daha önce gösterdiğimizden bir ölçü olmadığı sonucuna ulaşırız. Diğer bir taraftan, D sınıfı ölçülebilir uzayın bazı özelliklerini sağlamaktadır;

i. $A \in D$ ise $\mathbb{N} \backslash A \in D$ ve $d(\mathbb{N} \backslash A) = 1 - d(A)$

ii. $A, B \in D$ ve $A \cap B = \emptyset$ ise $A \cup B \in D$ ve $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$

3.4. Buck'ın Ölçü Yoğunluğu

İkinci bölümde Freedman'ın ele aldığı şekilde genel asimptotik yoğunluk fonksiyonunu ($\underline{\delta} : \mathrm{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$) aksiyomlaştırma süreci üzerinde duruldu. Freedman bu aksiyomları oluştururken ($\underline{d} : \mathrm{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$) en temel yoğunluk fonksiyonunun özelliklerini kullanmıştır. Fakat, bu durum arzu edilmeyen; öyle $A, B \in D$ ayrık olmayan kümeleri vardır ki $A \cup B$ kümesi D sınıfına ait değildir, durumuna sebep olmakta. Creighton Buck 1946 yılında yayınladığı makalede ölçü yoğunluk kavramını oluşturarak istenmeyen bu duruma çözüm getirmektedir.

$A = \{a.n + b : n \geq 0 \; ve \; a, b \in \mathbb{N}\} \coloneqq \{a.n + b\}$ kümesine aritmetik dizi denir. Aritmetik dizi kümesinin en önemli özelliği doğal yoğunluğa sahip ve $d(A) = 1/a$ oluşu. Aslında bu durum başlangıç noktamız olacak.

Doğal sayılar kümesi üzerinde yeni bir sınıf tanımlayalım; D_0 sınıfı, sonlu tane aritmetik dizi kümesinin birleşimi şeklinde yazılabilen tüm $A \subseteq \mathbb{N}$ alt kümelerinin

ve bu tür kümelerden sonlu tane farklı elemana sahip $B \subseteq \mathbb{N}$ alt kümelerin sınıfı olsun ($\emptyset$, D_0 sınıfında kabul edilecek). Bu noktada iki gösterime ihtiyaç duyacağız. *Gösterim*:

i. $A\backslash B$ kümesi sonlu ise bu durumu $A \dot{\subseteq} B$ ile göstereceğiz.

ii. $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ kümesi sonlu ise bu durumu $A \doteq B$ ile göstereceğiz.

Şimdi tanımladığımız D_0 sınıfının temel özelliklerini belirtelim.

Önerme 3.4.1 D_0 sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlar (Buck, 1946).

A-1) $A \in D_0$ ise $\mathbb{N}\backslash A \in D_0$

A-2) $A, B \in D_0$ ise $A \cup B, A \cap B \in D_0$

A-3) $A \in D_0$ ve $A \doteq B$ ise $B \in D_0$

Bu önerme gösteriyor ki D_0 sınıfı aslında kümelerin cebiridir.

Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesini sonlu tane ikili ayrık aritmetik dizi kümesinin birleşimi şeklinde yazabiliyorsak;

$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ öyle ki $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ için $A_i = \{a_i.n + b_i\}$ ve $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ ise $d(A) = \sum_{i=1}^{k} d(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$ eşitliğini elde ederiz.

Önerme 3.4.2 Her $A \in D_0$ için A kümesi doğal yoğunluğa sahiptir.

İspat: Keyfi $A \in D_0$ alalım ve $d(A)$'nın mevcut olduğunu gösterelim. $A \in D_0$ olduğundan $A \doteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ öyle ki $i \in \{1, \dots, k\}$ için $A_i = \{a_i.n + b_i\}$ şeklinde yazabiliriz. Eğer A_i kümeleri aralarında ikili ayrık ise yukarıda $d(A)$'nın mevcut olduğunu gördük. A_i kümelerinin ayrık olmadığı durumu inceleyelim.

$A_i = \{a_i.n + b_i\}$ ve $A_j = \{a_j.n + b_j\}$ ayrık olmayan iki farklı aritmetik dizi olsun. $A_i \cap A_j$ kümesini Çin Kalan Teoremini kullanaraktan bir aritmetik dizi kümesi şeklinde yazabiliriz; $A_i \cap A_j = \{a_{ij}.n + b_{ij}\}$.

Böylece $d(A_i \cup A_j) = \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_{ij}}$ eşitliğini elde ederiz. Bu metodu k tane aritmetik dizi için uyarlayabileceğimizden $d(A)$ değeri mevcuttur. ■

d yoğunluk fonksiyonunun D_0 üzerinde sağladığı temel özellikleri içeren önermeyi oluşturalım.

Önerme 3.4.3 d yoğunluğu D_0 kümesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlar (Buck, 1946).

B-1) Eğer $A, B \in D_0$ ve $A \doteq B$ ise $d(A) \leq d(B)$
B-2) Eğer $A, B \in D_0$ ve $A \cap B \doteq \emptyset$ ise $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$
B-3) Eğer $A, B \in D_0$ ise $d(A \cup B) + d(A \cap B) = d(A) + d(B)$

D_0 sınıfı ve d yoğunluğu sayesinde doğal sayılar kümesi üzerinde dış ölçü tanımlayabiliriz.

Tanım 3.4.4 (Pasteka, 2013) $\mu^*: P(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ dönüşümünü $S \in P(\mathbb{N})$ olmak üzere $\mu^*(S) = inf\{d(H) : S \subset H \; ve \; H \in D_0\}$ şeklinde tanımlanırsa μ^* dönüşümü dış ölçü olup Buck ölçü yoğunluğu veya kısaca ölçü yoğunluğu olarak adlandırılır μ^* dönüşümünü ölçü yoğunluğu olarak adlandırılmasının sebebi:

C-1) $S_1, S_2 \in P(\mathbb{N})$ ve $S_1 \subset S_2$ ise $\mu^*(S_1) \leq \mu^*(S_2)$
C-2) $S_1, S_2 \in P(\mathbb{N})$ için $\mu^*(S_1 \cup S_2) \leq \mu^*(S_1) + \mu^*(S_2)$
C-3) $S \in D_0$ ise $\mu^*(S) = d(S)$

özelliklerini sağlamasıdır.

C-2) özelliğini daha detaylı ele alacak olursak;

$S_1, S_2 \in P(\mathbb{N})$ için $\mu^*(S_1 \cup S_2) + \mu^*(S_1 \cap S_2) \leq \mu^*(S_1) + \mu^*(S_2)$ özelliğinin sağlandığı sonucuna varabiliriz (Pasteka, 2013).

İspat: $S_1, S_2 \in \mathbb{N}$ kümeleri verilsin. μ^* dönüşümünün tanımı gereğince, $\mathcal{E} > 0$ için $\exists H_1, H_2 \in D_0$ öyle ki $S_1 \subset H_1,\ S_2 \subset H_2$ olup

$$\mu^*(S_1) \leq d(H_1) \leq \mu^*(S_1) + \mathcal{E}$$

$$\mu^*(S_2) \leq d(H_2) \leq \mu^*(S_2) + \mathcal{E}$$

Eşitsizlikleri sağlanır. d yoğunluğu D_0 üzerinde sonlu toplamsal olduğundan

$$\mu^*(S_1 \cup S_2) \leq d(H_1 \cup H_2) = d(H_1) + d(H_2) - d(H_1 \cap H_2)$$

durumu elde edilir ve $\mu^*(S_1 \cap S_2) \leq d(H_1 \cap H_2)$ eşitsizliği göz önünde bulundurursak sonuca götürecek eşitsizliği elde ederiz;

$$\mu^*(S_1 \cup S_2) + \mu^*(S_1 \cap S_2) \leq \mu^*(S_1) + \mu^*(S_2) + 2\mathcal{E}$$

Keyfi $\mathcal{E} > 0$ değeri için eşitsizliğimiz doğru olduğundan;

$\mu^*(S_1 \cup S_2) + \mu^*(S_1 \cap S_2) \leq \mu^*(S_1) + \mu^*(S_2)$ istenilen sonuca ulaşırız. ■

Böylece $\forall S \subseteq \mathbb{N}$ için yukarıdaki özellikten $1 \leq \mu^*(S) + \mu^*(\mathbb{N} \backslash S)$ eşitsizliğini elde ederiz. Bu durum ise doğal sayılar kümesi üzerinde yeni bir sınıf tanımlamıza sebep olur.

Tanım 3.4.5 Eğer $S \subseteq \mathbb{N}$ için $\mu^*(S) + \mu^*(\mathbb{N} \backslash S) = 1$ eşitliği sağlanıyor ise S kümesine ölçülebilir veya Buck ölçülebilir küme denir. D_μ ile Buck ölçülebilir kümelerin sınıfını göstereceğiz (Pasteka, 2013).

Önerme 3.4.6 D_μ sınıfı küme cebiridir ve $\mu = \mu^*|_{D_\mu}$ kısıtlanışı D_μ üzerinde sonlu olasılık ölçüsüdür (Pasteka, 2013).

İspat: $S \in D_\mu$ ise $\mathbb{N}\backslash S \in D_\mu$ olacağı D_μ 'nın tanımından açıktır. Bu sebepten $A, B \in D_\mu$ iken $A \cup B \in D_\mu$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$A \cup B$ kümesi için yukarıdaki μ^* özelliğince $1 \leq \mu^*(A \cup B) + \mu^*(\mathbb{N}\backslash(A \cup B))$ her daim yazabiliriz. Şimdi $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(\mathbb{N}\backslash(A \cup B)) \leq 1$ olduğunu gösterelim.

$\mathbb{N}\backslash A, \mathbb{N}\backslash B \subseteq \mathbb{N}$ kümeleri için

$$\mu^*((\mathbb{N}\backslash A) \cup (\mathbb{N}\backslash B)) + \mu^*((\mathbb{N}\backslash A) \cap (\mathbb{N}\backslash B)) \leq \mu^*(\mathbb{N}\backslash A) + \mu^*(\mathbb{N}\backslash B)$$

$$\mu^*\big(\mathbb{N}\backslash(A \cap B)\big) + \mu^*\big(\mathbb{N}\backslash(A \cup B)\big) \leq 2 - \big(\mu^*(A) + \mu^*(B)\big)$$

$$\leq 2 - \mu^*(A \cup B) - \mu^*(A \cap B)$$

Buradan $\mu^*\big(\mathbb{N}\backslash(A \cap B)\big) + \mu^*\big(\mathbb{N}\backslash(A \cup B)\big) + \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leq 2$ eşitsizliği elde edilir ve $\mu^*(A \cap B) + \mu^*\big(\mathbb{N}\backslash(A \cap B)\big) \geq 1$ olduğundan $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(\mathbb{N}\backslash(A \cup B)) \leq 1$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermiş oluruz. ■

3.5. İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1951 yılında H. Fast ve H. Steinhaus tarafından reel diziler için tanımlandığını belirtmiştik ve tanımı yapabilmemiz için gerekli olan yoğunluk kavramı inceledik. Şimdi istatistiksel yakınsaklık kavramını oluşturabiliriz.

Tanım 3.5.1 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reel dizisi verilsin. Verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

limitinin mevcut olmasını sağlayan $L \in \mathbb{R}$ elemanı mevcut ise $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi L değerine istatistiksel yakınsar denir ve $st - \lim x_k = L$ ile gösterilir (Fridy, 1985).

$\mathcal{E} > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \mathcal{E}\}| = 0$ limitinin var olma durumunu inceleyelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \mathcal{E}\}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin (L - \mathcal{E}, L + \mathcal{E})\}|$$

eşitliğini yazabiliriz. $A(\mathcal{E}) = \{k \leq n : x_k \notin (L - \mathcal{E}, L + \mathcal{E})\} \subseteq \mathbb{N}$ şeklinde yazıp doğal yoğunluk fonksiyonunu göz önünde bulundurursak,

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \mathcal{E}\}| = 0$ ancak ve ancak verilen her $\mathcal{E} > 0$ için $A(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olmalıdır, $d\big(A(\mathcal{E})\big) = 0$, sonucuna varırız. Böylece keyfi bir topolojik uzayda tanımlı diziler için istatistiksel yakınsaklık tanımı yapılabilir.

Tanım 3.5.2 X bir topolojik uzay olmak üzere $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi verilsin. Eğer $x \in X$ noktasının her U komşuluğu için $d(\{k \in \mathbb{N}: x_k \notin U\}) = 0$ oluyorsa $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi X topolojik uzayında x'e istatistiksel yakınsar denir (Di Maio, 2008).

Önerme 3.5.3 Bir Hausdorff uzayda istatistiksel yakınsak bir dizinin limiti tektir (Di Maio, 2008).

İspat: X Hausdorff uzay olmak üzere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ istatistiksel yakınsak dizisi verilsin. Kabul edelim ki $st - limx_n = a$ ve $st - limx_n = b$ olup $a \neq b$ kabul edelim. O halde X Hausdorff uzay olduğundan öyle $a \in U$ ve $b \in V$ komşuluğu var ki $U \cap V = \emptyset$ olup istatistiksel yakınsaklığın tanımından $d(\{n \in \mathbb{N}: x_n \notin U\}) = 0$ ve $d(\{n \in \mathbb{N}: x_n \notin V\}) = 0$ yazılır. Doğal yoğunluk fonksiyonunun özelliğinden $d(\{n \in \mathbb{N}: x_n \in U\}) = 1$ ve $d(\{n \in \mathbb{N}: x_n \in V\}) = 1$ eşitliklerini elde edip $\{n \in \mathbb{N}: x_n \in U\} \coloneqq A \subseteq \mathbb{N}$ ve $\{n \in \mathbb{N}: x_n \in V\} \coloneqq B \subseteq \mathbb{N}$ olarak tanımlarsak $A \cap B = \emptyset$ olduğu görülür. Dolayısıyla $d(A \cup B) = d(A) + d(B) = 2$ çelişkisi elde edilir. ■

Önerme 3.5.4 X keyfi bir topolojik uzay olmak üzere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi verilsin. O halde $\lim x_n = x$ ise $st - \lim x_n = x$ olup karşıtı doğru değildir. Yani, $st - \lim x_n = x$ istatistiksel yakınsak iken $\lim x_n$ limiti mevcut olmayabilir.

Önerme 3.5.5 İstatistiksel yakınsak bir dizinin alt dizisi istatistiksel yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 3.5.6 Reel sayılar kümesi üzerinde $x_n = \begin{matrix} x_n = n & : \text{n asal} \\ x_n = 0 & : \text{diğer} \end{matrix}$ dizisi verilsin. $st - \lim x_n = 0$ olup $\lim x_n$ mevcut değildir. Ayrıca $x_{n(k)} := \{\text{asal sayılar}\}$ alt dizisi alınırsa istatistiksel yakınsak olmadığı da görülür.

Önerme 3.5.7 (Di Maio, 2008) X herhangi bir topolojik uzay ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dizisi olsun. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi istatistiksel yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $d(\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ (istatistiksel yoğun) ise $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi istatistiksel yakınsaktır.

İspat: ($\Longleftarrow$) Her dizi kendi içerisinde yoğun olacağından istatistiksel yakınsak olacaktır.

($\Longrightarrow$) $st - \lim x_n = x$ istatistiksel yakınsak dizisi ve $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istatistiksel yoğun alt dizisi verilsin. Farz edelim ki $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi istatistiksel yakınsak olmasın. O halde x 'in öyle bir V komşuluğu var ki $d(\{n(k): x_{n(k)} \notin V\}) \neq 0$ yazılır. $\{n(k): x_{n(k)} \notin V\} \subseteq \{n : x_n \notin V\}$ durumu mevcut olduğundan $d(\{n: x_n \notin V\}) \neq 0$ eşitsizliğini ele ederiz. Bu ise $st - lim x_n = x$ olmasıyla çelişir. O halde her istatistiksel yoğun alt dizi istatistiksel yakınsak olmalıdır. ■

3. YOĞUNLUK VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK KAVRAMI

Sadık EYİDOĞAN

Yakınsaklık teorisinde en çok arzulanan şey, limit değerini kullanmadan yakınsaklığı doğrulayacak bir ölçüt elde etmektedir. Bu amaç doğrultusunda Cauchy yakınsaklık kavramının istatistiksel uyarlaması 1985 yılında Fridy tarafından yapılmıştır.

Tanım 3.5.8 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reel dizisi verilsin.

Verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var ki $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$ oluyor ise $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Fridy, 1985).

Teorem 3.5.9 (Fridy, 1985) Aşağıdaki ifadeler denktir.

i. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ istatistiksel yakınsaktır.
ii. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ istatistiksel Cauchy dizisidir.
iii. Yakınsak $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunabilir öyle ki $d(\{k \in \mathbb{N}: y_k \neq x_k\}) = 0$

İspat: $(i \Longrightarrow ii)$ $st - \lim x_n = L$ ve keyfi $\varepsilon > 0$ değeri verilsin. İstatistiksel yakınsaklığın tanımından $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon/2\}| = 0$ limiti mevcuttur. Diğer bir ifadeyle $\{k \in \mathbb{N}: |x_k - L| < \varepsilon/2\}$ kümesinin doğal yoğunluğu bire eşittir. Fridy, makalesinde bu durumu hemen hemen tüm doğal sayılar için geçerlidir şeklinde "almost all k" göstermiştir.

Eğer, $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ değeri $|x_N - L| < \varepsilon/2$ eşitsizliğini sağlayan bir değer olarak seçilirse;

$$|x_k - x_N| < |x_k - L| + |x_N - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

eşitsizliğinden dolayı

$$\{k \in \mathbb{N}: |x_k - L| + |x_N - L| < \varepsilon\} \subseteq \{k \in \mathbb{N}: |x_k - x_N| < \varepsilon\}$$

ifadesini yazıp $d(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - L| < \varepsilon/2\}) = 1$ oluşundan

$d(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - x_N| < \mathcal{E}\}) = 1$ istenilen sonuca ulaşılır.

$(ii \Longrightarrow iii)$ $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Tanım gereğince verilen $\forall \mathcal{E} > 0$ için $N = N(\mathcal{E}) \in \mathbb{N}$ var ki $d(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - x_N| < \mathcal{E}\}) = 1$ yazılır. $\mathcal{E} = 1$ seçilirse $d(\{k \in \mathbb{N}: x_k \in (x_N - 1, x_N + 1)\}) = 1$ eşitliğini sağlayan $N = N(1) \in \mathbb{N}$ mevcut. Yani $I = [x_N - 1, x_N + 1]$ aralığı hemen hemen tüm x_k ları içerir. Benzer şekilde $\mathcal{E} = 1/2$ için $I' = [x_M - 1/2\,, x_M + 1/2]$ aralığı hemen hemen tüm x_k ları içerecek şekilde $M \in \mathbb{N}$ sayısı seçilebilir. İddiamız;

$I_1 = I \cap I'$ aralığı da hemen hemen tüm x_k ları içerir. Çünkü,

$$\{k \in \mathbb{N}: x_k \notin I \cap I'\} = \{k \in \mathbb{N}: x_k \notin I\} \cup \{k \in \mathbb{N}: x_k \notin I'\}$$

şeklinde yazabileceğimizden ve $d(\{k \in \mathbb{N}: x_k \notin I\}) = d(\{k \in \mathbb{N}: x_k \notin I'\}) = 0$ eşitliğinden ötürü $d(\{k \in \mathbb{N}: x_k \notin I \cap I'\}) = 0$ ifadesini elde ederiz.

Tekrardan istatistiksel Cauchy dizi tanımından $I'' = \left[x_{N(2)} - 1/4\,, x_{N(2)} + 1/4\right]$ aralığı hemen hemen tüm x_k ları içerecek şekilde $N(2) \in \mathbb{N}$ mevcuttur ve bir önceki iddiamızda olduğu gibi $I_2 = I_1 \cap I''$ aralığı hemen hemen tüm x_k ları içerir. Tümevarımsal inşaya devam edilirse $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ iç-içe kapalı aralıklar dizisi elde edilir öyle ki her bir $m \in \mathbb{N}$ için I_m aralığının uzunluğu 2^{1-m} olur ve hemen hemen tüm x_k ları içerir.

İç-içe kapalı aralıklar teoreminden; $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\lambda\}$ olacak şekilde bir λ reel sayısı mevcuttur.

Ek olarak her bir $m \in \mathbb{N}$ için I_m aralığı hemen hemen tüm x_k ları içerdiğinden $\frac{1}{n}|\{k \le n: x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ değeri olup $n > T_m$ şeklinde $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pozitif artan tam sayılar dizisi inşa edilebilir. $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dizisini kullanarak $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin alt dizisi olan $(z_{n(k)})_{n(k)\in\mathbb{N}}$ dizisini tanımlayalım:

$k > T_1$ ve $T_{m+1} \ge k > T_m$ iken $x_k \notin I_m$ sağlayan tüm terimler için $x_k = z_{n(k)}$ şeklinde olsun. Artık terimleri $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisiyle hemen hemen eşit olan yakınsak $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisini tanımlayabiliriz:

$$y_k = \begin{cases} \lambda & : \quad x_k = z_{n(k)} \\ x_k & : \quad diğer \end{cases}$$

İddiamız $\lim_{k\to\infty} y_k = \lambda$ olduğudur.

$\mathcal{E} > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise ya $x_k = z_{n(k)}$ dır, bu durumda $y_k = \lambda$ ya da $y_k = x_k \in I_m$ dır. İki durumda da $|y_k - \lambda| \leq I_m$ aralığının uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ eşitsizliği sağlandığından $\lim_{k\to\infty} y_k = \lambda$ olduğu görülür.

Son olarak göstermemiz gereken $d(\{k \in \mathbb{N}: y_k \neq x_k\}) = 0$ eşitliğidir.

$T_m < n < T_{m+1}$ ise $\{k \leq n: y_k \neq x_k\} \subseteq \{k \leq n: x_k \notin I_m\}$ yazılır ve buradan

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n: y_k \neq x_k\}| \leq \frac{1}{n}|\{k \leq n: x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}$$

eşitsizliği elde edilir ve limit durumunda $d(\{k \in \mathbb{N}: y_k \neq x_k\}) = 0$ sonucuna ulaşılır.

$(iii \Longrightarrow i)$ Verilen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunabilir öyle ki $\lim_{k\to\infty} y_k = \lambda$ ve $d(\{k \in \mathbb{N}: y_k \neq x_k\}) = 0$ durumları sağlansın. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{k \leq n: |x_k - \lambda| \geq \mathcal{E}\} \subseteq \{k \leq n: y_k \neq x_k\} \cup \{k \leq n: |y_k - \lambda| > \mathcal{E}\}$ yazılır. $\lim_{k\to\infty} y_k = \lambda$ olduğu için $\{k \leq n: |y_k - \lambda| > \mathcal{E}\}$ kümesi sonlu olur ve buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n: |x_k - \lambda| \geq \mathcal{E}\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n: y_k \neq x_k\}| + 0 = 0$$

istenilen durum elde edilir. ■

3. YOĞUNLUK VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK KAVRAMI

Sadık EYİDOĞAN

4. SÜREKLİLİK VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Birinci bölümde sürekli fonksiyonlar dizisinin limit fonksiyonunun sürekli olabilmesi için gereken koşulları belirleme üzerine dururken ikinci bölümde yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramı inceledik. A. Caserta ve arkadaşlarının 2011 yılında yayınladıkları "Statistical convergence in function spaces" makalede limit fonksiyonunun sürekliliği için gereken koşulları istatistiksel yakınsaklık kavramını kullanaraktan belirlemişlerdir. Dördüncü bölümde bu çalışma üzerinde duracağız.

Birinci bölümde Arzela ve Alexandroff yakınsaklık tanımı verilmişti. Şimdi sırasıyla Arzela ve Alexandroff yakınsaklıkların istatistiksel versiyonlarının tanımını verelim.

Tanım 4.1 X topolojik uzayı, (Y,ρ) metrik uzayı ve $f_n : X \longrightarrow Y$ olacak şekilde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sürekli fonksiyonlar dizisi verilsin. Eğer,

i. $\forall x \in X$ için $st-\lim f_n(x) = f(x)$ istatistiksel yakınsaklığı mevcut
ii. Verilen her $\mathcal{E} > 0$ ve $\delta(A) = 1$ olacak şekilde her $A \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi için sonlu sayıda $\{n_1, \dots, n_k\} \subset A$ doğal sayı değerleri var ki her bir $x \in X$ için $\rho(f_{n_i}(x), f(x)) < \mathcal{E}$ eşitsizliği en az bir $i \leq k$ için sağlanır

koşullarını sağlayan $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu mevcut ise $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi f fonksiyonuna X üzerinde istatistiksel Arzela yakınsaktır denir ve $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{st-Arz}{\rightrightarrows} f$ şeklinde gösterilir. (Caserta, 2011)

Tanım 4.2 X bir topolojik uzay ve (Y,ρ) metrik uzay olmak üzere $f_n : X \longrightarrow Y$ olacak şekilde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sürekli fonksiyon dizisi ve $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

i. $\forall x \in X$ için $st-\lim f_n(x) = f(x)$ istatistiksel yakınsaklığı mevcut
ii. Verilen her $\mathcal{E} > 0$ ve $\delta(A) = 1$ olacak şekilde her $A \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi için X in öyle bir açık örtüsü $M = \{U_n : n \in A\}$ ve $M_A = \{n_1 < \cdots < n_k < \cdots\} \subset A$ kümesi bulunabilir öyle ki her bir $x \in U_k$ için $\rho(f_{n_k}(x), f(x)) < \mathcal{E}$ eşitsizliği sağlanmalı

özellikleri sağlanıyor ise $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna istatistiksel Alexandroff yakınsak denir ve $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{st-Al}{\rightrightarrows} f$ şeklinde gösterilir (Caserta, 2011).

Teorem 4.3 (Caserta, 2011) X bir topolojik uzay ve (Y,ρ) metrik uzay olmak üzere $f_n : X \longrightarrow Y$ olacak şekilde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sürekli fonksiyon dizisi ve $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu verilsin.
$\forall x \in X$ için $st-\lim f_n(x) = f(x)$ istatistiksel yakınsaklığı mevcut ise aşağıdaki ifadeler bir birine denktir.

i. f süreklidir
ii. Keyfi $K \subseteq X$ kompakt alt kümesi üzerinde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{st-Arz}{\rightrightarrows} f$
iii. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{st-Al}{\rightrightarrows} f$

İspat:
$(i \Longrightarrow ii)$ Keyfi $K \subseteq X$ kompakt alt kümesi olmak üzere, keyfi $\mathcal{E} > 0$ ve $\delta(A) = 1$ olacak şekilde $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi verilsin.

$\forall y \in X$ için $st - \lim f_n(y) = f(y)$ istatistiksel yakınsaklık mevcut olduğundan $A_y \subseteq \mathbb{N}$ var ki $\forall n \in A_y$ için $\rho(f_n(y), f(y)) < \mathcal{E}$ eşitsizliği sağlanır.

$n_y \in A_y \cap A$ seçilirse $U_y = \{x \in X : \rho(f_{n_y}(x), f(x)) < \mathcal{E}\}$ kümesi tanımlanabilir. $y \in U_y$ olduğundan U_y boştan farklıdır. Ayrıca $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sürekli fonksiyon dizisi ve f sürekli olduğundan U_y açık kümedir. $\{U_y : y \in K\}$ kümeler ailesini düşünecek olursak $K \subseteq \bigcup_{y\in K} U_y$ açık örtüsü oluşturulur ve K kümesinin kompakt olmasından

$$K \subseteq \bigcup_{y_1,\dots,y_k \in K} U_{y_i}$$

sonlu alt örtüsü yazılır ve $\{n_{y_1}, \dots, n_{y_k}\} \subset A$ doğal sayı değerleri var ki her bir $x \in K$ için $\rho(f_{n_{y_i}}(x), f(x)) < \mathcal{E}$ eşitsizliği en az bir $i \leq k$ için sağlanır. Buradan K kompakt kümesi üzerinde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{st-Arz}{\rightrightarrows} f$ olduğu ispatlanır.

$(iii \Longrightarrow i)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{st-Al}{\rightrightarrows} f$ yakınsaklığı mevcut olsun. f fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için dizisel süreklilik tanımını kullanalım; yani $a_n \longrightarrow a$ iken $f(a_n) \longrightarrow f(a)$ olduğunu gösterelim.

Verilen keyfi $\mathcal{E} > 0$ değerine karşılık $n_0 \in \mathbb{N}$ bulalım öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $\rho(f(a_n), f(a)) < \mathcal{E}$ eşitsizliği sağlanmalı.

i. $st - lim f_n(a) = f(a)$ olduğundan $B_a \subset \mathbb{N}$ yoğun alt kümesi var ki her $n \in B_a$ için $\rho(f_n(a), f(a)) < \mathcal{E}/3$ sağlanır.

ii. Alexandroff yakınsaklığı mevcut olduğundan $\mathcal{E}/3 > 0$ ve $B_a \subset \mathbb{N}$ için X in öyle bir açık örtüsü $U = \{U_n : n \in A\}$ ve $M = \{n_1 < \cdots < n_k < \cdots\} \subset B_a$ kümesi bulunabilir öyle ki her bir $x \in U_k$ için $\rho(f_{n_k}(x), f(x)) < \mathcal{E}/3$ eşitsizliği sağlanır.

iii. f_{n_k} fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan $f_{n_k}(a_n) \longrightarrow f_{n_k}(a)$ yakınsaklığı mevcut; yani $\mathcal{E}/3 > 0$ için $n' \in \mathbb{N}$ var ki $\forall n \geq n'$ için $\rho\left(f_{n_k}(a_n), f_{n_k}(a)\right) < \mathcal{E}/3$

$n_0 = n'$ seçilirse; $\forall n \geq n_0$ için $a_n \in U_k$ olduğunu düşünürsek

$$\rho\big(f(a_n), f(a)\big) \leq \underbrace{\rho\left(f(a_n), f_{n_k}(a_n)\right)}_{ii\ den} + \underbrace{\rho\left(f_{n_k}(a_n), f_{n_k}(a)\right)}_{iii\ den} + \underbrace{\rho(f_{n_k}(a), f(a))}_{i\ den}$$

$$< \mathcal{E}/3 + \mathcal{E}/3 + \mathcal{E}/3 = \mathcal{E}$$

olduğundan f fonksiyonu süreklidir. (Caserta, 2012)

$(ii \Longrightarrow iii)$ durumunun ispatı güçlü düzgün süreklilik kavramının oluşturacağı yeni bir topoloji ve yakınsaklık kavramı üzerinden yapıldığından bu tezde değinilmeyecektir. İspat (Caserta, 2011) makalesinde bulunabilir. ■

KAYNAKLAR

Bartle, R.G., 1955. On compactness in functional analysis. Trans. Amer. Math. Soc. 79:35-57

Buck, R.C., 1946. The measure theoretic approach to density. Amer. J. Math. 68:560-580

Caserta, A., Di Maio, G. ve Hola, L., 2010. Arzela's Theorem and strong uniform convergence on bornologies. J. Math. Anal. Appl. 371: 384-392

Caserta, A., Di Maio, G. ve Kocinac, L.D.R., 2011. Statistical convergence in function spaces. Abstract and Applied Analysis doi:10.1155/2011/420419

Caserta, A. ve Kocinac, L.D.R., 2012. On statistical exhaustiveness. Applied Mathematics Letters 25:1447-1451

Di Maio, G. ve Kocinac, L.D.R., 2008. Statistical convergence in topology. Topology and its Applications 156:28-45

Feldman, J., 2016. Dini's Theorem. http://www.math.ubc.ca/~feldman/m321/dini.pdf

Freedman, A.R. ve Sember, J.J., 1981. Densities and Summability. Pac. J. of Mathematics 95(2):293-305

Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence. Analysis 5:301-313

Gordon, R.A., 1998. When is a Limit Function Continuous? Mathematics Magazine 71(4):306-308

Hairer, E. and Wanner, G., 2008. Analysis by Its History, Springer.

Kelley, J.L., 1950. Convergence in Topology. Duke Math. J. 17(3):277-283

Laugwitz, D., 1987. Infinitely Small Quantities in Cauchy's Textbooks. Historia Mathematica, 14(3):258-274

Maddox, I.J., 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press. 165-166s

Niven, I., 1951. The asymptotic density of sequences. Bull. Amer. Math. Soc. 57:420-434

Pasteka, M., 2013. On four approaches to density. Publishing House of Slovak Academy of Science

Rickey, V.F., 1996. Cauchy's Famous Wrong Proof, 68-71. http://fredrickey.info/hm/CalcNotes/CauchyWrgPr.pdf

Vermeeren, S., 2010. Sequences and nets in topology. https://arxiv.org/abs/1006.4472

ÖZGEÇMİŞ

15.01.1989 yılında Sivas'ta doğdu. Matematik lisans eğitimini Yıldız Teknik Üniversitesi'nde 2011 yılında tamamladı. Matematik öğrenimine Çukurova Üniversitesi'nde devam etmektedir.